



# Croissance lente thermiquement activée et piégeage d'une fissure dans les matériaux structurés à une échelle mésoscopique : expériences et modèles

Stéphane Santucci

## ► To cite this version:

Stéphane Santucci. Croissance lente thermiquement activée et piégeage d'une fissure dans les matériaux structurés à une échelle mésoscopique : expériences et modèles. Physique [physics]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2004. Français. NNT : . tel-00009085

**HAL Id: tel-00009085**

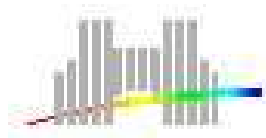
**<https://theses.hal.science/tel-00009085>**

Submitted on 25 Apr 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Laboratoire de Physique  
de l'École Normale Supérieure de Lyon**



**THÈSE DE DOCTORAT**

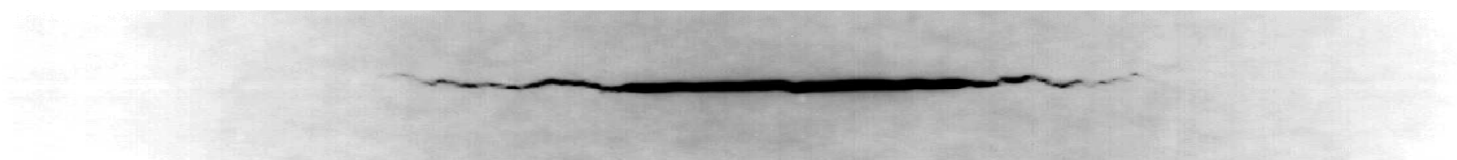
pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon**  
Spécialité : Physique

présentée par

**Stéphane SANTUCCI**

---

**Croissance lente thermiquement activée et piégeage d'une fissure  
dans les matériaux structurés à une échelle mésoscopique :  
expériences et modèles**



sous la direction de **Loïc VANEL**

soutenue publiquement le 29 Septembre 2004  
devant la commission d'examen formée de

<b>Elisabeth BOUCHAUD</b>	Rapporteur
<b>Sergio CILIBERTO</b>	Invité
<b>Peter HOLDSWORTH</b>	Examinateur
<b>Jean-Pierre HULIN</b>	Rapporteur
<b>Stéphane ROUX</b>	Président
<b>Loïc VANEL</b>	Directeur
<b>Gérard VIGIER</b>	Examinateur



Thèse de doctorat  
2004

---

**Stéphane Santucci**



**Croissance lente  
thermiquement activée  
et piégeage d'une fissure  
dans les matériaux structurés  
à une échelle mésoscopique :  
expériences et modèles.**

Sous la direction de :  
Loïc Vanel

---

Laboratoire de physique  
Ecole Normale Supérieure de Lyon







## *Une belle aventure ...*

Ce mémoire est l'aboutissement de trois années de thèse que j'ai eu la chance de réaliser au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, aux côtés de Loïc Vanel et Sergio Ciliberto. Arrivant sur la pointe des pieds à l'École, j'étais à la fois impressionné et déchiré quant à l'idée de quitter mon Sud natal et ma "mère méditerranée". C'est maintenant avec un grand plaisir et surtout beaucoup d'émotion que je repense à cette aventure qui m'a permis de "grandir" grâce à la rencontre de nombreux personnages.

Ainsi, en premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et toute ma gratitude envers Loïc, qui m'a encadré tout au long de la thèse avec une attention, une patience et une gentillesse remarquables. Sa disponibilité, ses conseils et intuitions ont toujours été un grand réconfort. J'ai eu énormément de plaisir à travailler sous sa tutelle. L'ombre de Sergio plane également sur la thèse, son enthousiasme et son énergie débordante ont toujours été un moteur pour mon travail. Par leurs qualités tant scientifiques qu'humaines, ils resteront tous deux un exemple pour moi, et j'espère que j'aurai la chance et le privilège de travailler encore à leurs côtés.

Je remercie particulièrement Stéphane Roux de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse, ainsi qu'Elisabeth Bouchaud et Jean-Pierre Hulin d'avoir accepté la tâche de rapporteurs. Je remercie également Gérard Vigier et Peter Holdsworth pour leur participation au jury.

Je tiens à remercier Riccardo alias Ciccino, qui m'a initié aux simulations numériques. Avec leur bonne humeur, Ciccino et Alessio ont donné un véritable élan à ce travail. Le travail expérimental n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide bienveillante des mécanos et en particulier Franck Vittoz. Je voudrais remercier chaleureusement l'équipe technique du laboratoire et en particulier Laurence, Nadine (merci pour les amendes), Anne et Nora.

L'ambiance du laboratoire est particulièrement propice aux contacts enrichissants. J'ai pu ainsi profiter de nombreuses discussions et partager de nombreux moments de détente avec "les footeux" (ou plutôt "les boiteux") Thierry, Angel et Patrick, Eric le suédophile (bon courage pour le bar à Arcachon), Hervé le déménageur, les anciens thésards devenus grands, Zoher, Micka, Julien, Baptiste, Doru, Pierre ... merci également à Jean-Christophe, Nicolas, Antoine, Bernard Castaing, Jean-François Palierne ... J'en profite pour souhaiter bonne chance à Louis, Etienne, Fanfan, Cécile, Stéphanie, Romain, Joseph, Fred, Michaël, Béber, Chantal, Sebastien, Bruno, Jalal, Maxime, Mathieu, Pete, Mat, Matteo, Yvan ... J'espère que nos routes se recroiseront.

Ces dernières années, j'ai eu la chance de rencontrer de véritables personnages qui sont devenus de vrais amis. Je pense en particulier aux nomades et aventuriers sur terre et en mer que j'espère retrouver bientôt sur les côtes nordiques : le trio magique : Etienne, Louis & Mathieu l'andiniste, mais aussi Fanfan, Tran-ber, Eric et sa petite famille, Nico "le jardinier disparu"...

Je tiens à remercier la famille Rollin pour son accueil chaleureux, et témoigner à mes amis de Nice et d'ailleurs que j'ai pu délaisser parfois, Christophe & Rose-Marie, Gwen & Pat, Sam, Greg lou nissart (Allez l'OGYM), Alex & Isabelle, Manu et toute la bande de Bellet ... que leur amitié m'est très chère.

Enfin, j'embrasse ma famille, mes parents, Djé & Laëti, et ma Karin à qui j'adresse ce message *"si notre histoire lyonnaise se termine, notre aventure scandinave ne fait que commencer..."*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Mécanique de la rupture . . . . .	9
1.1.1	Un paradoxe ? . . . . .	9
1.1.2	Concentration des contraintes . . . . .	10
1.1.3	Les modes d'ouverture d'une fissure . . . . .	12
1.1.4	Champ des contraintes au voisinage de la fissure . . . . .	12
1.2	Rupture sous-critique . . . . .	14
1.2.1	Lois phénoménologiques de croissance d'une fissure . . . . .	15
1.2.2	Aspects thermodynamiques de la rupture lente . . . . .	18
1.2.3	Objectifs . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>25</b>
2.1	Principe . . . . .	26
2.2	Appareillages et système d'acquisition . . . . .	27
2.2.1	La machine de traction . . . . .	27
2.2.2	Le capteur de Force . . . . .	28
2.2.3	PC - Carte d'acquisition . . . . .	28
2.2.4	Caméra . . . . .	29
2.3	Les échantillons . . . . .	30
2.3.1	Les feuilles de papier . . . . .	31
2.3.2	Les autres échantillons utilisés . . . . .	37
2.3.3	Flambage . . . . .	40
2.4	Protocole expérimental . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Résultats Expérimentaux</b>	<b>43</b>
3.1	Observations préliminaires . . . . .	45
3.1.1	Signal de force . . . . .	45
3.1.2	Signal de déformation . . . . .	46
3.1.3	Analyse d'images . . . . .	48
3.1.4	Croissance du défaut . . . . .	49
3.2	Analyse de la dynamique moyenne . . . . .	52

3.2.1	Longueur critique $L_C$ . . . . .	54
3.2.2	Comparaison $L_G/L_C$ . . . . .	59
3.2.3	Longueur de croissance caractéristique $\zeta$ . . . . .	64
3.2.4	Temps de rupture $\tau$ . . . . .	67
3.2.5	Vitesse d'avancement moyenne . . . . .	76
3.3	Analyse de la dynamique intermittente . . . . .	78
3.3.1	Détection des sauts . . . . .	79
3.3.2	Sauts de longueur . . . . .	81
3.3.3	Temps d'attente . . . . .	83
3.4	Expériences de fluage sur d'autres matériaux . . . . .	85
3.4.1	Les films de polycarbonate . . . . .	86
3.4.2	Les rideaux . . . . .	88
3.4.3	Les feuilles d'acier et de laiton . . . . .	89
3.4.4	Rôle de la structure et des hétérogénéités . . . . .	90
3.4.5	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Croissance thermiquement activée</b>	<b>93</b>
4.1	Fluctuations statistiques de contraintes . . . . .	95
4.1.1	Milieu élastique $2d$ continu . . . . .	95
4.1.2	Plaque élastique discrète avec un défaut . . . . .	96
4.2	Dynamique de croissance moyenne de la fissure . . . . .	97
4.2.1	Mécanisme de rupture . . . . .	97
4.2.2	Un processus de rupture irréversible . . . . .	98
4.3	Modèle numérique : réseau $2d$ de ressorts . . . . .	100
4.3.1	Présentation du modèle numérique . . . . .	101
4.3.2	Croissance de la fissure . . . . .	103
4.4	Comparaison aux résultats expérimentaux . . . . .	115
4.4.1	Longueur de croissance caractéristique $\zeta$ . . . . .	116
4.4.2	Temps de rupture $\tau$ . . . . .	117
4.5	Conclusion . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Mécanisme de croissance par sauts</b>	<b>125</b>
5.1	Effet de piégeage du réseau . . . . .	127
5.1.1	Milieu élastique $2d$ discret . . . . .	127
5.1.2	Modèle numérique : réseau $2d$ de ressorts . . . . .	128
5.2	Croissance par <i>sauts</i> thermiquement activés . . . . .	134
5.2.1	Scénario de croissance . . . . .	134
5.2.2	Rappel : croissance lente et irréversible thermiquement activée . . . . .	135
5.2.3	Distribution des tailles de sauts . . . . .	136
5.3	Comparaison aux résultats expérimentaux . . . . .	141

5.3.1	Distribution des tailles de sauts . . . . .	142
5.3.2	Moyenne et variance des tailles de sauts . . . . .	144
5.3.3	Vitesse de croissance moyenne $v$ . . . . .	147
5.3.4	Temps d'attente . . . . .	149
5.3.5	Description à une plus petite échelle et rugosité . . . . .	150
5.4	Comparaison aux résultats numériques . . . . .	152
5.4.1	Saut de longueurs . . . . .	153
5.4.2	Temps d'attente . . . . .	153
5.5	Conclusion . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>155</b>
6.1	Résultats . . . . .	156
6.2	Questions ouvertes et perspectives . . . . .	158
<b>A</b>	<b>Croissance lente</b>	<b>161</b>
A.1	Obtention de l'équation différentielle d'évolution de la fissure . . . . .	161
A.1.1	Fluctuations statistiques de contraintes . . . . .	161
A.1.2	Processus d'endommagement irréversible . . . . .	161
A.2	Résolution de l'équation . . . . .	162
A.2.1	Approximations et reformulation de l'équation . . . . .	162
A.2.2	Evolution temporelle de la fissure . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Sauts thermiquement activés</b>	<b>165</b>
B.1	Mécanisme de croissance par sauts . . . . .	165
B.2	Obtention de la distribution $P_s(s)$ des tailles de sauts . . . . .	166
B.2.1	Vitesse moyenne d'avancement de la fissure . . . . .	166
B.2.2	Temps de vie d'un état métastable $\langle t_w \rangle$ . . . . .	166
B.2.3	Taille des sauts $s$ dues aux fluctuations d'énergie $E_f$ . . . . .	167
B.2.4	Distribution des tailles de sauts $P_s(s)$ . . . . .	167
B.2.5	Taille moyenne $\langle s \rangle$ et variance des sauts $\langle s^2 \rangle$ . . . . .	168
B.2.6	Vitesse moyenne d'avancement de la fissure $v$ . . . . .	168
B.3	Comportements asymptotiques . . . . .	168
B.4	Comparaison aux résultats expérimentaux . . . . .	169
<b>C</b>	<b>Publications</b>	<b>171</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Mécanique de la rupture . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1.1	Un paradoxe? . . . . .	9
1.1.2	Concentration des contraintes . . . . .	10
1.1.3	Les modes d'ouverture d'une fissure . . . . .	12
1.1.4	Champ des contraintes au voisinage de la fissure . . . . .	12
<b>1.2</b>	<b>Rupture sous-critique . . . . .</b>	<b>14</b>
1.2.1	Lois phénoménologiques de croissance d'une fissure . . . . .	15
1.2.2	Aspects thermodynamiques de la rupture lente . . . . .	18
1.2.3	Objectifs . . . . .	23

---

La compréhension des mécanismes de fracturation apparaît très importante, non seulement dans le domaine des applications industrielles, mais aussi d'un point de vue plus fondamental dans le domaine de la physique et en particulier en physique statistique.

Dans ce chapitre introductif, un bref rappel historique illustré nous permettra d'une part de montrer effectivement combien l'étude de la rupture des matériaux est importante et d'autre part d'introduire le contexte de notre étude, qui a porté en particulier sur les mécanismes physiques de croissance lente d'une fissure dans des matériaux hétérogènes. Quelques notions de base de la mécanique de la rupture seront également exposées afin d'introduire des concepts et des outils qui nous seront utiles pour notre analyse. Enfin, nous concluons ce chapitre, en présentant le plan de notre étude.



L'étude de la rupture des matériaux en vue d'une meilleure compréhension des mécanismes d'endommagement est un domaine de recherche très actif, en particulier dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Par exemple, afin de mieux définir des paramètres de sécurité, il apparaît crucial de pouvoir prédire la durée de vie des matériaux de structure. L'utilisation de plus en plus répandue de matériaux à structure hétérogène comme les céramiques, les matériaux composites, les matériaux fibreux, dans les constructions notamment (bâtiment, industries aéronautiques, navales, ferroviaires ou automobiles) nécessite une bonne connaissance de la résistance de ces matériaux. Cependant, malgré le dynamisme des recherches dans ce sujet (comme en témoigne la bibliographie pléthorique), accentué par l'utilisation de ces nouveaux matériaux, notre pouvoir de prédiction de la durée de vie d'échantillons sous contrainte reste bien pauvre. Cette mauvaise connaissance de la résistance des matériaux au cours du temps peut avoir des conséquences dramatiques pour la sécurité de tous, et l'actualité nous donne malheureusement de nombreux exemples.

La figure 1.1 illustre un exemple de fissurations catastrophiques qu'a connu l'histoire maritime américaine :



FIG. 1.1 – En Janvier 1943, le tanker américain *T2 SS Schenectady* alors qu'il venait de terminer les derniers tests en mer avec succès, se brise soudainement en deux dans le port [1].

Les nombreuses catastrophes survenues au cours de l'histoire ont montré la nécessité de quantifier et comprendre les mécanismes d'endommagement et de croissance de fissures, et ont été le moteur de nombreuses études.

L'étude de la mécanique de la rupture apparaît également primordiale dans le domaine de la géophysique. Une meilleure compréhension des mécanismes de fracturation des matériaux hétérogènes nous permettrait de mieux comprendre, voire de prédire, les phénomènes de tremblements de terre, qui est un défi scientifique de grande importance. En effet, on peut trouver des analogies entre la rupture de certains matériaux hétérogènes et les mécanismes de rupture dans les failles tectoniques lors de tremblement de terre [16, 18].



FIG. 1.2 – Cette photographie prise au nord de l'Islande montre une fracture de 20 centimètres de large, ouverte dans la partie Sud du champ de fractures du Krafla. L'Islande se situe sur le rift médio océanique de l'Atlantique nord qui sépare la plaque nord américaine de la plaque européenne à un rythme de 2cm/an. Au niveau du rift même en Islande, cette extension se traduit par de très importantes crises d'ouverture où on peut observer jusqu'à 10 mètres de déplacement en moins de 10 ans. Cette fracture a été formée lors de la dernière crise entre 1975-1984 [2].

Si les enjeux économiques et sociaux apparaissent évidemment très importants, les divers motifs que montrent les objets fracturés (vitres brisées, peintures craquelées, canyons, lacs asséchés ...) nous fascinent et éveillent notre curiosité.



FIG. 1.3 – Réseau de fissure dans de l'argile (Mines d'or Igarapé Bahia. Brésil), probablement dû à une instabilité hydrodynamique (gradient de tension de surface lors du processus d'évaporation) [3].

D'autre part, mieux comprendre les propriétés de résistance des matériaux, apparaît également très important d'un point de vue plus fondamental et notamment dans le domaine de la physique statistique.

Dans les années 60, des expériences [38, 39] ont mis en évidence l'importance des aspects thermodynamiques de la rupture. Plus récemment, des travaux théoriques [45] considèrent la rupture comme un processus d'activation thermique. Cette approche établie à partir d'une analogie avec la théorie de la nucléation d'un noyau de Beker-Döring [46] permet d'interpréter des expériences de fracture sur des gels [23, 50]. Parallèlement ont commencé à apparaître des modélisations physiques basées sur la théorie de la percolation pour décrire la rupture de matériaux désordonnés [40]. Ces études conduisent à considérer la rupture comme une transition de phase, le seuil de rupture apparaissant comme un point critique de cette transition. De nombreuses expériences récentes [21, 25, 54, 55, 56, 60, 71] montrent des comportements à l'approche du seuil de rupture, en accord qualitatif avec les propriétés d'un point critique.

Ainsi, il apparaît donc nécessaire pour comprendre les mécanismes physiques d'endommagement, de traiter les aspects thermodynamiques de la rupture.

La description thermodynamique de la rupture dans un matériau élastique hétérogène se rattache à une problématique plus générale sur le comportement dynamique de systèmes élastiques désordonnés. Au cours de la thèse, nous avons participé activement au Groupe De Recherche "*Systèmes élastiques - Du désordre à la plasticité*" [4]. Le but du GDR était justement de réunir diverses communautés (physique du solide, magnétisme, mouillage ...) travaillant sur des systèmes physiques très différents en apparence (parois magnétiques, dynamique de lignes de contact, propagation d'un front de fracture ...), mais qui relèvent d'une problématique commune : la dynamique de systèmes élastiques désordonnés, i.e en présence d'un potentiel aléatoire.

Dans ce travail de thèse, nous tenterons justement de décrire la dynamique de rupture de matériaux hétérogènes, dans le cadre d'une description thermodynamique. Avant de motiver et détailler les objectifs de notre travail, il est nécessaire de rappeler le contexte de notre étude, et d'effectuer quelques rappels de mécanique de la rupture.

## 1.1 Mécanique de la rupture

Nous rappelons quelques notions de base de mécanique de la rupture, nous permettant d'introduire des concepts et des outils que nous utiliserons par la suite.

### 1.1.1 Un paradoxe ?

Bien que la rupture de liaisons atomiques nécessite des contraintes comparables au module d'Young, la rupture des matériaux solides fragiles se produit habituellement en appliquant des contraintes beaucoup plus faibles (de 2 à 3 ordres de grandeurs de moins), comme le montre ce tableau :

Material	Young's Modulus $Y$ ( $10^{11}$ dyne/cm <sup>2</sup> )	$Y/5$ ( $10^{11}$ dyne/cm <sup>2</sup> )	Theoretical Strength ( $10^{11}$ dyne/cm <sup>2</sup> )	Practical Strength ( $10^{11}$ dyne/cm <sup>2</sup> )
Iron	16	3	3	.085
Copper	19	4	3	.049
Silicon	18	4	3	.062
Glass	7	1	4	.002

FIG. 1.4 – Les forces de rupture en pratique et en théorie sont différentes de plusieurs ordres de grandeur ( $1 \text{ Dyne} = 10^{-5} \text{ N}$ ). Les résultats théoriques sont obtenus à partir de modèles réalistes à l'échelle atomique. Tableau extrait de l'article de vulgarisation "How things break" Physics Today, 24-29 (1996), M. Marder and J. Fineberg [35].

La mécanique de la fracture est née au début du siècle dernier, avec les travaux pionniers d'Inglis (1913) [36] et de Griffith (1920) [37]. Ces derniers ont clarifié l'origine de cet apparent affaiblissement en postulant la pré-existence de fissures dans les matériaux. Ces défauts vont favoriser la rupture du matériau par un effet de concentration des contraintes en leur pointe.

### 1.1.2 Concentration des contraintes

Inglis a analysé la modification des contraintes dans un solide due à la présence de défauts [36]. Son étude a mis en évidence un phénomène de concentration des contraintes à la pointe d'une fissure.

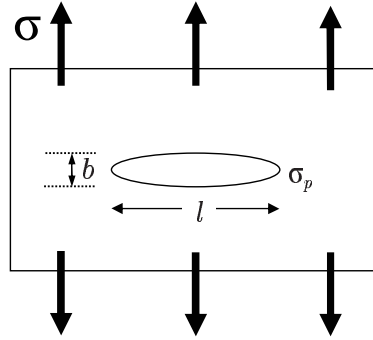


FIG. 1.5 – Plaque comportant une cavité elliptique de longueur  $\ell$  et de rayon de courbure  $\rho_c = \frac{b^2}{\ell}$ , soumise à une contrainte  $\sigma$ , en mode 1 de rupture.

Considérant comme sur la figure 1.5 une plaque avec un défaut de forme elliptique, de longueur  $\ell$  et de rayon de courbure  $\rho_c$ , soumise à une contrainte constante  $\sigma$  perpendiculairement à la fissure, ie en mode 1 de rupture, Inglis détermine la contrainte à la pointe  $\sigma_p$  du défaut :

$$\sigma_p = \sigma \left( 1 + 2\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}} \right)$$

Le terme en  $\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}}$  montre que la contrainte à la pointe du défaut dépend aussi bien de sa forme, avec le rayon de courbure  $\rho_c$ , que de sa longueur  $\ell$ . Si on prend par exemple, une fissure d'une longueur de l'ordre du centimètre  $\ell \sim 1\text{cm}$  avec un rayon de courbure de l'ordre du micron  $\rho_c \sim 1\mu\text{m}$ , on obtient alors que la contrainte à la pointe de ce défaut est  $\sigma_p \simeq 200\sigma$ , 200 fois la contrainte appliquée au bord de la plaque !

Cet effet de concentration des contraintes a eu effectivement des conséquences tragiques dans le passé. On peut citer deux exemples historiques : Les navires de la marine américaine "*The Liberty Ships*" construits durant la Seconde Guerre Mondiale, et un des premiers avions de ligne Britannique "*the Comet*".

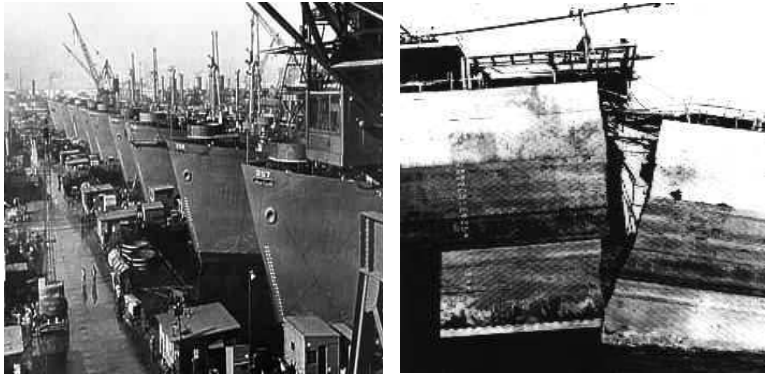


FIG. 1.6 – Les *Liberty ships* ont été construits très rapidement pour permettre le transport de marchandises, durant la Seconde Guerre Mondiale. Cependant, la plupart des vaisseaux ont coulé, non pas sous les attaques ennemies mais plutôt à cause de la propagation d'une fissure provoquant la fracture fragile de la coque. Sur les 4700 cargos construits, plus de 200 navires ont vu leurs coques se briser en deux, alors qu'ils se trouvaient encore à quai. De mauvaises soudures au niveau des écoutilles semblent être à l'origine de ces fractures catastrophiques [5].



FIG. 1.7 – En 1953, *The British de Havilland Comet* un des premiers avions de ligne commerciale au monde, se brise en plein vol, à cause de la croissance d'une fissure qui s'est développée à partir d'un des hublots carrés [6] !

### 1.1.3 Les modes d'ouverture d'une fissure

Nous considérons une fente idéale, infiniment plate dans un matériau élastique. La charge agissant sur les lèvres d'une fissure peut toujours être décomposée en trois modes d'ouverture indépendants, comme le montre la figure 1.8 :

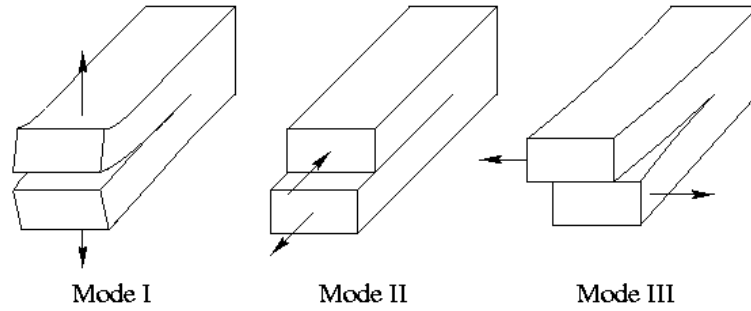


FIG. 1.8 – Les 3 modes d'ouverture d'une fracture.

Le mode I est le mode dit de traction pure (perpendiculairement au plan de la fissure), le mode II est un mode de cisaillement dans le plan de la fissure perpendiculairement à la ligne de fissure et le mode III est le mode de cisaillement dans le plan de la fissure, parallèlement à la ligne de fissure. Si nous considérons les coordonnées cartésiennes de la figure 1.9, dans le plan  $y = 0$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \text{en mode I : } & \sigma_{yy} \neq 0 \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0 \\ \text{en mode II : } & \sigma_{xy} \neq 0 \quad \sigma_{yy} = 0 \\ \text{en mode III : } & \sigma_{yz} \neq 0 \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Lors de nos expériences, nous effectuerons des chargements d'échantillons comportant un défaut initial, en appliquant une contrainte dans la direction perpendiculaire à la fissure, en mode I d'ouverture.

### 1.1.4 Champ des contraintes au voisinage de la fissure

Irwin a été le premier (en 1958) à exprimer les champs de contraintes et de déplacements dans le voisinage de la pointe d'une fissure idéale, infiniment plate, dans un solide parfaitement élastique [17].

En coordonnées cylindriques,  $r$ ,  $\theta$ , et  $z$  montrées sur la figure 1.9, le champ des contraintes proche dans le voisinage de la la pointe de la fissure en mode I d'ouverture s'écrit :

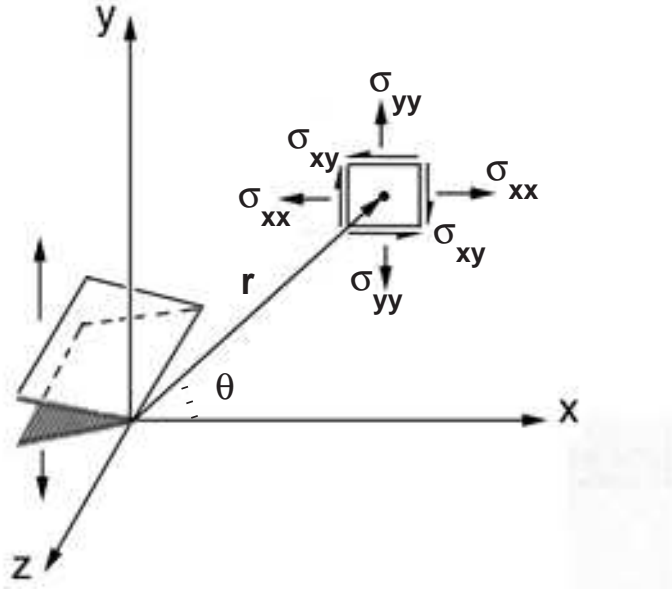


FIG. 1.9 – Analyse du champ des contraintes dans le voisinage de la pointe d'une fissure en mode *I* d'ouverture, dans un matériau parfaitement élastique.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}$$

où  $K_I$  est un paramètre qui dépend de la contrainte appliquée, de la longueur de la fissure et de la géométrie de l'échantillon.

On peut en fait écrire de manière simplifiée à la fois le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  et des déplacements  $u_i$  pour les différents modes d'ouverture [11] :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \\ u_i &= \frac{K}{\sqrt{2Y}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta)\end{aligned}$$

où les fonctions  $f_i$  et  $f_{ij}$  ne dépendent que de  $\theta$  et  $Y$  est le module d'Young du matériau.



On remarque donc que dans un milieu élastique linéaire, les contraintes à la pointe du défaut décroissent avec la distance à la pointe  $r$  en  $r^{-1/2}$ . En revanche, loin de la fissure, la décroissance est différente, comme le prédisent les mécaniciens Muskhelishvili et Goodier (conduisant éventuellement à des interactions à longue portée) :  $\sigma_{yy} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-(a/x)^2}}$  pour une fissure de longueur  $2a$ , soumis à une contrainte constante  $\sigma$  en mode I de rupture (l'origine des axes est prise au centre de la fente) [13, 14, 15].

### Le facteur d'intensité des contraintes

De manière consistante avec le calcul d'Inglis, pour une fissure infiniment plate (avec un rayon de courbure  $\rho_c \rightarrow 0$ ), on remarque que la contrainte diverge à la pointe de la fissure (lorsque  $r \rightarrow 0$ ). Le coefficient  $K$  est appelé *facteur d'intensité des contraintes*, et ne dépend que de la contrainte appliquée, de la longueur de la fissure et de la géométrie de l'échantillon [11, 12] :  $K = \sigma\sqrt{L\psi}$ , avec  $\sigma$  contrainte appliquée,  $L$  longueur de la fissure et  $\psi$  facteur de correction géométrique. Le facteur d'intensité des contraintes  $K$  donne une mesure de l'amplitude du champ de contraintes local en tête du défaut.

Ainsi, ce paramètre est largement utilisé par les mécaniciens de la fracture et les ingénieurs. En effet, d'une part, il permet d'estimer la ténacité ou le seuil de rupture de matériaux soumis à des contraintes (correspondant à un facteur d'intensité des contraintes critiques  $K_C$ ), permettant alors de définir des paramètres de sécurité. D'autre part, il permet également d'estimer l'énergie élastique libérée  $G$  par unité de longueur d'avancement de la fissure,  $G = \frac{K^2}{2Y}$ .

## 1.2 Rupture sous-critique

Un effet voisin de l'affaiblissement d'un matériau lié à la présence de fissures (paragraphe 1.1.1) et qui semble également très surprenant, est la rupture d'un solide soumis à une contrainte inférieure au seuil de rupture expérimental (seuil qui tient compte de la concentration des contraintes due à la présence de défauts). Ce comportement physique, parfois nommé *rupture sous-critique* ou *rupture retardée* (un mauvais anglicisme), provoque une activation de la rupture, avec un endommagement progressif du matériau qui casse au bout d'un temps  $\tau$  très sensible à l'amplitude de la contrainte appliquée. En effet, le temps de vie de l'échantillon décroît dramatiquement, lorsque la contrainte appliquée augmente.

Nous avons justement examiné au cours de cette thèse, les mécanismes physiques de rupture sous-critique conduisant à la rupture lente, activée, de

matériaux hétérogènes, dans le cadre d'une description thermodynamique.

### 1.2.1 Loïs phénoménologiques de croissance d'une fissure

Malgré les nombreux efforts, que nous présenterons au paragraphe suivant, pour décrire le phénomène de rupture lente dans un cadre thermodynamique, notre pouvoir prédictif de la dynamique de croissance d'une fissure est maigre. La plupart des descriptions de la dynamique lente d'endommagement en particulier en sciences de l'ingénieur, restent phénoménologiques. En effet, les diverses lois que l'on peut trouver dans la littérature (voir [12] et ses nombreuses références, et à titre d'exemple récents [31],[32]) sont pour la plupart issues de la loi bien connue maintenant sous le nom de "loi de Paris".

#### "Loi de Paris" (1961)

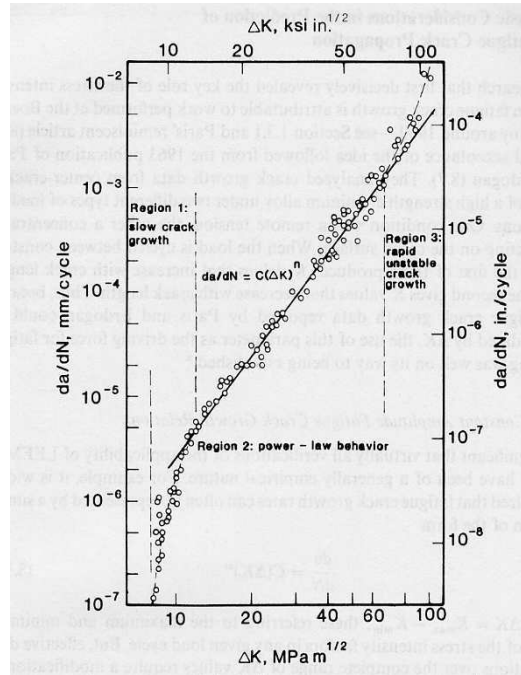


FIG. 1.10 – Variation de la longueur de fissure au cours du chargement cyclique  $\frac{da}{dN}$  en fonction du facteur d'intensité des contraintes  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$  pour des expériences de fatigue sur des échantillons d'aluminium [12].

Deux types d'expériences "tests" intéressent particulièrement l'ingénierie : les expériences dites de *fatigues* où les échantillons sont soumis à un chargement cyclique, et des expériences (aussi bien de fatigue ou de fluage) sous contrôle de paramètres environnementaux comme l'humidité et la température (expériences de corrosion sous contrainte).

### ***Fatigue***

Dans les années 60, Paris et ses collaborateurs, ont montré que le facteur d'intensité des contraintes  $K$  apparaît comme un paramètre de contrôle de la dynamique de rupture de matériaux soumis à des tests de fatigue [29, 30]. La figure 1.10 illustre leurs résultats. Pour un chargement cyclique uniforme entre  $K_{min}$  et  $K_{max}$ , ils proposent la loi suivante 1.1, pour relier la variation de longueur de la fissure  $a$  avec le nombre de chargements cycliques effectués  $N$  :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad \text{avec} \quad \Delta K = K_{max} - K_{min} \quad (1.1)$$

où  $C$  et  $m$  sont des constantes qui dépendent du matériau, du chargement (charge moyenne et fréquence des cycles) et des conditions environnementales (taux d'humidité et température).

### ***Corrosion sous contrainte***

Pour les expériences de corrosion sous contrainte, lorsque le chargement ne varie pas ou peu la loi suivante est alors généralement utilisée :

$$\frac{da}{dt} = DK^n \quad (1.2)$$

où  $D$  et  $n$  sont des constantes qui dépendent du matériau, du chargement et des conditions environnementales (taux d'humidité et température).

La figure 1.11 montre les résultats d'expériences de corrosion sous contraintes sur des verres, réalisées par Wiederhorn [52].

### **"Les variantes de la loi de Paris"**

La loi de Paris très simple ne permet pas de rendre compte des divers comportements observés. Par exemple, les observations expérimentales montrent que la fissure ne se propage que pour des valeurs du facteur d'intensité des contraintes  $\Delta K$  supérieures à une valeur seuil  $\Delta K_{th}$ . A l'opposé, pour des chargements importants, la fissure doit atteindre un régime de dynamique

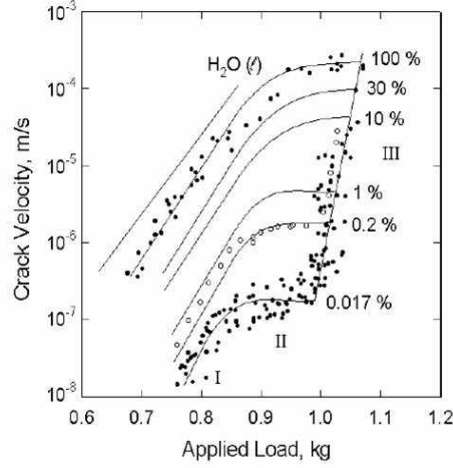


FIG. 1.11 – Vitesse de croissance d'une fissure pour des expériences de corrosion sous contraintes pour différents taux d'humidité. Wiederhorn observe qualitativement 3 régions bien distinctes et propose alors différents mécanismes de croissance : la région (I) correspond à une croissance lente de la fissure où la vitesse de croissance augmente avec la charge ; dans le plateau de la région (II), la vitesse de croissance est limitée par la vitesse de diffusion de l'eau à la pointe de la fissure ; et enfin la région (III) correspond à un régime de dynamique rapide où la vitesse est indépendante du taux d'humidité. S. M. Wiederhorn, J. Am. Ceram. Soc. 50, 407 (1967).

rapide. De plus, les exposants  $n$  et  $m$  obtenus expérimentalement peuvent être très différents d'un matériau à un autre.

Ainsi, un grand nombre de lois de fatigues, variantes de la loi de Paris, empiriques ont alors été utilisées pour tenter de décrire les diverses observations expérimentales. On peut citer par exemple [31] qui utilise les lois suivantes pour analyser la propagation de fissures pour des expériences de fatigue dans des alliages métalliques, ou des expériences de corrosion sous-contrainte dans des verres :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= C (\Delta K - \Delta K_{th})^m && \text{fatigue} \\ \text{ou} \quad \frac{da}{dt} &= D (K - K_{th})^n && \text{corrosion} \end{aligned}$$

### 1.2.2 Aspects thermodynamiques de la rupture lente

Un mécanisme physique possible de la rupture sous-critique est l'activation thermique, expérimentalement mis en évidence par Brenner ou Zhurkov [38, 39].

Les expériences de Zhurkov (Int. J. Fract. Mech. 1, 311 (1965))

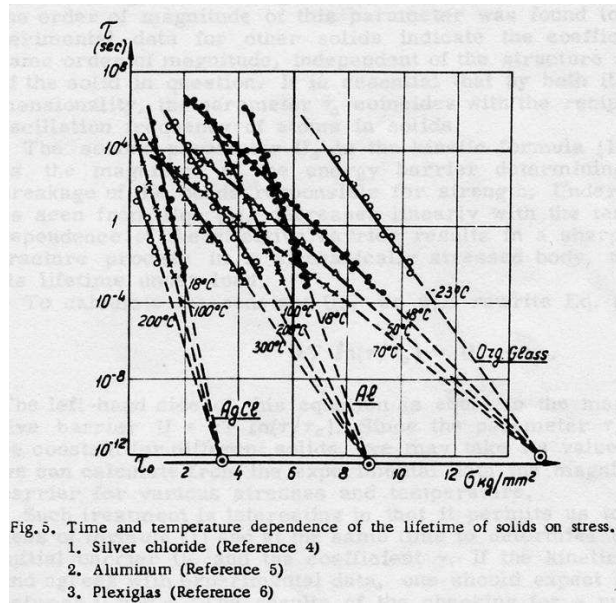


FIG. 1.12 – Temps de rupture  $\tau$  en fonction de la contrainte, pour différents matériaux et différentes températures  $T$ .

Les résultats de ces expériences de fluage (chargement à contrainte constante  $\sigma$  inférieure au seuil de rupture des matériaux) sur divers matériaux (métaux, alliages, verres polymériques), pour différentes contraintes  $\sigma$  et températures  $T$ , sont pour le moins remarquables, voire incroyables. En effet, Zhurkov a pu mesurer des temps de rupture  $\tau$  compris entre  $\sim 10^{-3}s$  et  $\sim 10^6s$  (soit 9 ordres de grandeur!), en faisant varier la température sur une gamme de  $500^\circ C$ . Ainsi, il met en évidence comme le montre la figure 1.12 que les temps de vie  $\tau$  des divers matériaux diminuent exponentiellement avec la contrainte appliquée  $\sigma$ . De plus, pour une contrainte fixée, on peut observer que le temps de rupture  $\tau$  diminue lorsque la température augmente.

Zhurkov décrit alors de manière phénoménologique une cinétique de la résistance des matériaux, où le temps de rupture  $\tau$  suit une loi d'Arrhenius

avec une barrière d'énergie  $U$  décroissant avec la contrainte :

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U}{k_B T}} \quad \text{avec} \quad U = U_0 - \alpha \sigma$$

où  $U_0$  est du même ordre de grandeur que l'énergie de sublimation.

La figure 1.13 montre cette barrière d'énergie  $\Delta U$  en fonction de la contrainte  $\sigma$  pour différents matériaux et différentes températures  $T$  :

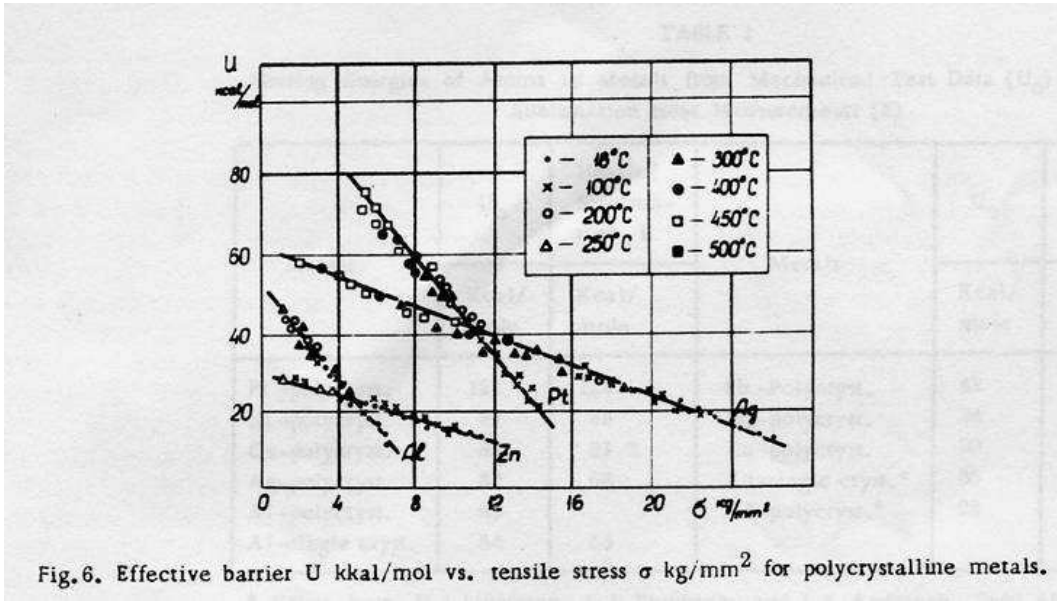


FIG. 1.13 – Barrière d'énergie  $U$  en fonction de la contrainte, pour différents matériaux et différentes températures  $T$ .

Plus récemment, des travaux théoriques [42, 43, 44, 45] utilisant les travaux de Griffith [37] ont montré comment la physique statistique permet de décrire l'apparition de fissures par fluctuations thermiques dans un milieu homogène qui devient métastable sous contrainte.

Nous pouvons illustrer le principe de ces approches théoriques en calculant, à partir du concept énergétique de Griffith, la barrière d'énergie correspondant au système (feuille élastique comportant une fissure initiale), que nous avons choisi aussi bien lors de notre étude expérimentale que théorique. Nous pourrions alors mettre à l'épreuve ces prédictions en les comparant à nos résultats expérimentaux et théoriques.

### Nucléation d'une fissure critique et barrière d'énergie de Griffith

On considère une plaque soumise à une contrainte  $\sigma$  dans la direction perpendiculaire à la fissure.

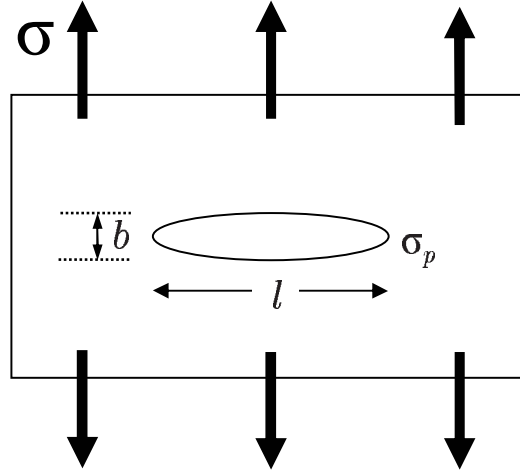


FIG. 1.14 – Plaque comportant un trou elliptique de longueur  $L$ , soumise à une contrainte  $\sigma$  perpendiculaire au défaut.

L'énergie potentielle par unité d'épaisseur de la feuille  $U_{pot}$ , somme de l'énergie élastique emmagasinée et de l'énergie de surface  $\gamma$  nécessaire pour ouvrir la fissure, s'écrit en fonction d'un seul paramètre, la longueur de la fissure  $L$  :

$$U_{pot} = U_0 - \frac{\pi L^2 \sigma^2}{4Y} + 2\gamma L \quad (1.3)$$

où  $Y$  est le module d'Young, et  $U_0$  l'énergie élastique en l'absence de fissure.

A partir de cette expression de l'énergie potentielle, Griffith prédit une taille limite de fissure, au delà de laquelle la rupture est rapide et irréversible.

En effet, cette énergie est maximale pour une longueur de fissure critique  $L_G$ , longueur dite de Griffith, au delà de laquelle le seul état stable est le solide séparé en deux. Cette modélisation montre qu'un solide sous contrainte, sans fente, est clairement dans un état métastable dont le temps de vie dépend du temps de nucléation d'une fissure de taille critique  $L_G = \frac{4\gamma Y}{\pi \sigma^2}$ . Dans cette géométrie, la barrière d'énergie à franchir est :  $U_G = \gamma L_G = \frac{4\gamma^2 Y}{\pi \sigma^2}$ .

Différents travaux [43, 44, 45], s'inspirant essentiellement de l'approche énergétique de Griffith, ont montré que le temps de vie suit une loi d'Arrhénius avec une barrière d'énergie  $U_G$  se comportant en  $\sigma^{-2}$  et  $\sigma^{-4}$  pour une géométrie 2 et 3d respectivement (sans fente initiale).

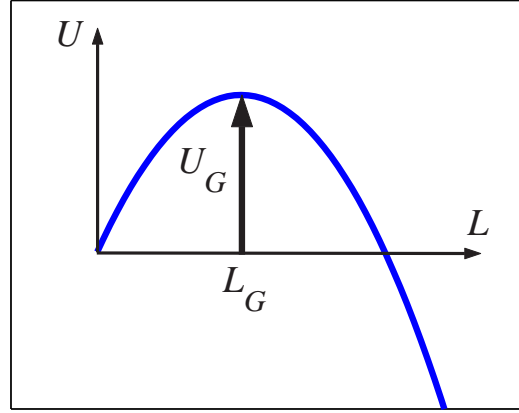


FIG. 1.15 – Représentation schématique de l'énergie potentielle  $U_{pot}$  d'une plaque comportant un défaut de longueur  $L$ , soumise à une contrainte  $\sigma$  perpendiculaire à la fissure, en fonction de la longueur de la fente  $L$ . L'énergie potentielle de ce système est maximale pour la longueur de fissure critique  $L_G$  longueur dite de Griffith.

Dans le même esprit, si l'on part d'une fente initiale stable de longueur  $\ell_i$ , la barrière d'énergie devient :

$$\Delta U = U(L_G) - U(L_i) = \gamma L_i \left( \frac{K_i}{K_c} - \frac{K_c}{K_i} \right)^2 = \gamma L_i f(K_i, K_c) \quad (1.4)$$

où  $K_i = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2} L_i}$  et  $K_c = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2} L_G}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte initial et critique. On remarque que cette barrière d'énergie est une fonction linéaire de la longueur de fente initiale multipliée par une fonction ne dépendant que des facteurs d'intensité de contrainte.

#### Commentaires

- La forme fonctionnelle des barrières d'énergie en fonction de la contrainte  $\sigma$  est différente de celle proposée par Zhurkov.
- Ce choix pour la barrière d'énergie suppose implicitement que la fissure peut explorer des états réversibles de longueurs de fente comprises entre  $L_i$  et  $L_G$ , et n'est donc pas correct si la fissure croît de manière *irréversible*.
- De plus, cette approche permet uniquement de prédire le temps de rupture  $\tau$  des échantillons, mais ne décrit en aucun cas la dynamique de rupture progressive et la croissance lente d'une fissure.



### Rôle du désordre et de l'irréversibilité du processus de rupture

Malgré les divers travaux expérimentaux et théoriques, l'affirmation que les fluctuations de température sont suffisantes pour nucléer des micro-fissures et provoquer leur croissance est encore très débattue, les mécanismes physiques sous-jacents de cette dynamique lente étant encore mal compris. En effet, les fluctuations de température apparaissent en général trop faibles pour permettre de franchir une barrière estimée comme le coût en énergie libre pour atteindre la longueur de fissure critique de Griffith.

Dans le cadre d'un modèle à  $3d$ , Guarino et Ciliberto [56] lors d'expériences de traction sur des matériaux très hétérogènes (bois aggloméré et fibres de verre) estiment que la température est 10 fois trop petite pour expliquer les temps de rupture observés. Cela peut se comprendre si l'on admet que la barrière d'énergie a été légèrement surestimée. On peut montrer que la barrière d'énergie diminue de manière significative, en prenant en compte le *désordre* du matériau, et/ou l'*irréversibilité* du processus de rupture.

#### – *Rôle des hétérogénéités du matériau*

Divers travaux récents [40, 41, 58] ont effectivement mis en évidence le rôle du désordre qui réduit de manière effective la barrière d'énergie. Nous verrons que dans notre approche théorique au chapitre 5, les hétérogénéités du matériau n'apparaîtront que sous la forme d'une échelle mésoscopique de discrétisation (désordre structurel figé). Nous discuterons la possibilité d'intégrer dans notre description l'effet du désordre sur les propriétés du matériau.

#### – *Rôle de l'irréversibilité du processus de fracturation*

Un ingrédient fondamental qui n'est pas suffisamment pris en compte est l'irréversibilité de la rupture, qui conduit à une dynamique hors-équilibre. La barrière d'énergie est certainement beaucoup plus faible si les fluctuations thermiques doivent simplement permettre la rupture irréversible de liaisons atomiques les unes après les autres (on peut remarquer qu'il y a eu des tentatives [44] essayant de prendre en compte l'irréversibilité du processus de rupture. Cependant, Golubovic propose un mécanisme complexe et trouve finalement que le temps de rupture est déterminé par une longueur critique plus petite que la longueur de Griffith, conduisant à un exposant différent de la loi de puissance en contrainte pour la barrière d'énergie, soit  $\sigma^{-1}$  et  $\sigma^{-2}$  pour une géométrie 2 et  $3d$  respectivement). Notre analyse montrera le rôle crucial de l'irréversibilité du processus de rupture.

## Rôle des déformations viscoélastiques et plastiques

Il est important de remarquer également qu'il existe effectivement d'autres approches pour décrire la dynamique lente de rupture, à partir de l'examen des propriétés rhéologiques des matériaux. On peut citer à titre d'exemples les travaux de Williams [19], de Langer [33], de Chudnovsky et Shulkin [34].

Williams lui, propose un mécanisme de propagation dû aux déformations viscoélastiques dans la zone d'endommagement à la pointe de la fissure qui provoque alors des relaxations de contraintes [19]. Quant à Chudnovsky et Shulkin [34], ils décrivent la croissance lente d'une fissure dans du polyéthylène, en analysant la zone d'endommagement fortement plastique à la pointe de la fissure ("crack layer zone"). Ils prédisent alors une vitesse de croissance de la forme :  $v \propto \frac{K^4}{Kc^2 - K^2}$  où  $K$  est le facteur d'intensité des contraintes et  $K_c$  la ténacité correspondant au facteur d'intensité des contraintes critiques (il est intéressant de signaler que leur modèle prédit une divergence de la vitesse à l'approche du seuil de rupture. Notre modélisation montrera que l'écart au seuil de rupture apparaît effectivement comme un paramètre de contrôle de cette dynamique et prédira également une divergence de la vitesse mais d'une forme fonctionnelle différente).

Notre approche théorique considérant des matériaux parfaitement élastiques ne prendra pas en compte la relaxation éventuelle de contraintes due à des effets viscoélastiques ou plastiques.

### 1.2.3 Objectifs

L'objet de la thèse est précisément d'étudier les mécanismes physiques de croissance lente d'une fissure sous contrainte, en terme d'un processus d'activation thermique. Notre travail va tenter de clarifier le rôle des fluctuations statistiques de contraintes à l'équilibre thermodynamique dans le phénomène de rupture sous-critique.

Afin d'examiner cette dynamique lente de rupture, nous menons en parallèle une étude expérimentale, en réalisant des expériences de traction principalement sur des matériaux hétérogènes fibreux (feuilles de papier, tissus, films de polymères), et une approche théorique basée sur des simulations numériques d'un réseau bi-dimensionnel de ressorts, modélisant un milieu élastique discret  $2d$ .

Nous allons décrire dans un premier temps le dispositif expérimental qui nous a permis de suivre la croissance lente d'une fissure pré-existante dans divers matériaux fibreux en géométrie plane.

Ensuite, nous montrerons les résultats expérimentaux, principalement obtenus sur des expériences de chargement à force constante sur des feuilles de

papier. Nous discuterons également les résultats d'expériences effectuées sur d'autres matériaux ayant un comportement visco-élastique et plastique, permettant de tester les limites de notre approche théorique (où nous considérons des matériaux parfaitement élastiques).

Enfin, nous montrerons que ces résultats peuvent être décrits de façon remarquable grâce à un modèle simple d'activation thermique, où nous mettons en évidence l'importance de l'irréversibilité du processus de rupture, et l'effet des hétérogénéités du matériau, qui apparaissent uniquement dans notre approche comme une échelle de discrétisation caractéristique de la structure mésoscopique du matériau.

# Chapitre 2

## Dispositif expérimental

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Principe . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Appareillages et système d'acquisition . . . . .</b>	<b>27</b>
2.2.1	La machine de traction . . . . .	27
2.2.2	Le capteur de Force . . . . .	28
2.2.3	PC - Carte d'acquisition . . . . .	28
2.2.4	Caméra . . . . .	29
<b>2.3</b>	<b>Les échantillons . . . . .</b>	<b>30</b>
2.3.1	Les feuilles de papier . . . . .	31
2.3.2	Les autres échantillons utilisés . . . . .	37
2.3.3	Flambage . . . . .	40
<b>2.4</b>	<b>Protocole expérimental . . . . .</b>	<b>41</b>

---

Dans ce chapitre nous présentons le dispositif expérimental utilisé pour notre étude et les techniques de mesures employées pour caractériser les mécanismes physiques d'endommagement sous-critique conduisant à la rupture lente dite retardée.

Nous avons adapté et développé un dispositif expérimental précédemment utilisé [20, 21] pour étudier la dynamique de rupture de matériaux hétérogènes et suivre en particulier la croissance lente d'une fissure pré-existante dans des échantillons bi-dimensionnels. L'utilisation d'échantillons en géométrie  $2d$  comportant une fissure, permet d'étudier l'avancement de cet unique défaut qui localise la rupture, en s'affranchissant des problèmes d'instabilités du front de fissure observés en géométrie  $3d$ .

## 2.1 Principe

Afin d'étudier précisément les mécanismes de croissance lente d'une fissure sous contrainte, nous réalisons des *expériences de tension à force constante inférieure au seuil de rupture du matériau, dites de fluage*, sur des échantillons comportant un défaut macroscopique initial. Le mode de rupture est un mode de traction pure appelé mode 1 d'ouverture. Les matériaux utilisés seront principalement des matériaux hétérogènes fibreux, en géométrie plane (feuilles de papier).

Les figures 2.1 et 2.2 permettent d'identifier différents éléments de notre dispositif expérimental.

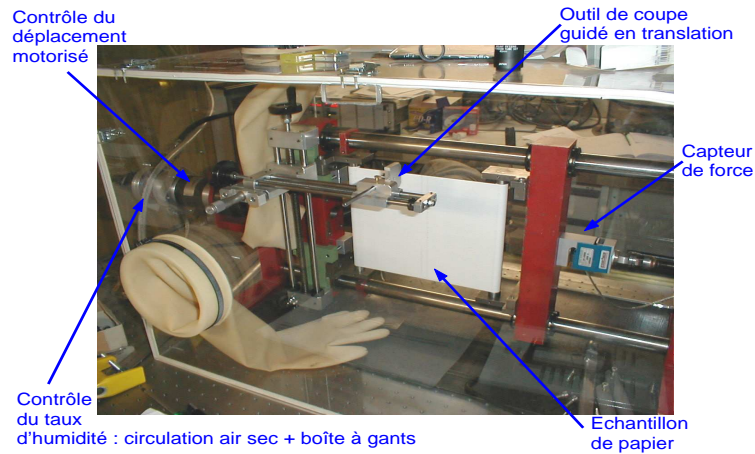


FIG. 2.1 – Photographie de la machine de traction et des différents éléments du montage expérimental.

Une machine de traction, pilotée par un moteur pas à pas qui contrôle le déplacement d'une mâchoire, effectue le chargement de l'échantillon. Cette mâchoire entraîne le déplacement d'un barreau cylindrique en acier sur lequel est fixé l'échantillon. L'autre barreau cylindrique est fixé à une mâchoire libre de glisser sous l'effet de la tension. Elle transmet (grâce à cette liberté de mouvement) la tension au capteur de force, qui mesure ainsi la tension exercée sur l'échantillon.

Un système de rétroaction piloté par logiciel nous permet d'imposer une force constante aux échantillons. La machine de traction est placée elle-même dans une enceinte où nous pouvons contrôler le taux d'humidité. En réalisant une circulation d'air sec, nous maintenons le taux d'humidité à un niveau faible.

Les échantillons comportent un défaut macroscopique initial, réalisé au centre de la feuille. Un jeu de lames de rasoir calibrées nous permet d'obtenir une forme et une longueur de fente initiale précise. Nous analyserons la dynamique de croissance de cette fente initiale.

Le capteur de force mesure la force appliquée à l'échantillon ; sa déformation est connue à partir du déplacement imposé par le moteur. Enfin, la croissance de la fissure est analysée grâce à une caméra haute-résolution et ultra-rapide.

## 2.2 Appareillages et système d'acquisition

### 2.2.1 La machine de traction

La machine de traction conçue et réalisée par l'équipe technique du laboratoire est une machine en acier, permettant de charger uniaxialement une plaque fine en mode 1 de rupture. Les échantillons sont chargés en augmentant la distance entre les mâchoires. Un moteur pas à pas (Micro Controle modèle UE42), asservi à un système de pilotage électronique (Micro Controle ITL09) entraîne en rotation une vis sans fin déplaçant une mâchoire, guidée par 2 barres cylindriques. Grâce à un système de découplage, ce moteur pas à pas contrôle le déplacement avec une précision de 400 pas par micromètre. La vitesse de chargement est de l'ordre de  $v = 38 \mu\text{m}/\text{s}$ . Le frottement de la mâchoire sur le système de guidage est de l'ordre de  $3N$ .

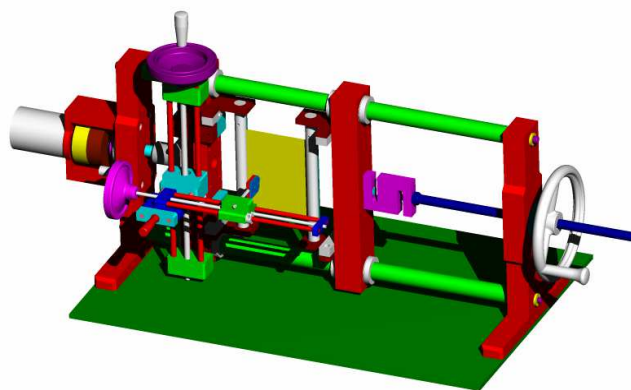


FIG. 2.2 – Schéma de la machine de traction.

Des barreaux cylindriques en acier sont bloqués sur les mâchoires par des vis. Les échantillons sous forme de feuilles sont scotchés et enroulés autour de

ces barreaux (2 tours sont effectués afin d'utiliser le frottement et réduire la tension sur le scotch), en s'assurant que la tension appliquée est bien homogène sur les bords des échantillons. Le parallélisme entre les machoires a été vérifié. De plus, un système de guidage des échantillons sur les barreaux n'autorise qu'un jeu inférieur au millimètre pour une longueur d'échantillon de l'ordre de  $\sim 21cm$ , assurant ainsi des conditions expérimentales très proches d'un mode 1 de rupture de nos échantillons

Un système de vis micrométrique permet de déplacer une lame de rasoir afin de réaliser la fente initiale, de manière précise au centre de la feuille. De plus, la contrainte à la pointe du défaut dépend aussi bien de la longueur du défaut que de sa forme. Aussi, pour obtenir une meilleure reproductibilité des mesures, nous disposons d'un jeu de lames de différentes tailles afin de travailler sur des échantillons avec des défauts de longueurs et de formes initiales bien calibrées. La largeur de la lame utilisée nous donne la longueur de la fissure initiale, qui varie ainsi de  $L_i = 1cm$  à  $L_i = 4cm$ .

### 2.2.2 Le capteur de Force

Une jauge de contraintes de précision (Mini-capteur de force en "S", Interface) est fixée à une mâchoire libre de glisser sous l'effet de la tension, transmettant donc la tension appliquée au capteur de force. Cette jauge de contraintes nous permet de mesurer la force appliquée à l'échantillon. Sa sensibilité est de  $3,23mV/V$  et sa capacité est de  $2000N$ ; pour une alimentation de  $10V$ , le signal délivré par le capteur de force est de  $32.3mV$ , pour une force de  $2000N$ . Les forces appliquées à nos divers échantillons sont de l'ordre de quelques centaines de Newtons. La raideur du capteur de force est de  $K = 4.10^6 N/m$ .

Un conditionneur réalisé au laboratoire, amplifie et filtre (filtrage passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = 1kHz$ ) le signal délivré par le capteur de force.

### 2.2.3 PC - Carte d'acquisition

Un ordinateur (processeur Pentium à  $133MHz$ ) muni d'une carte d'acquisition Analogique/Digital 16 bits, (PC-M10-16XE10, National Instruments), contrôle via un système de pilotage électronique (Micro-Contrôle) et enregistre le déplacement  $d$  imposé par le moteur pas à pas. Connaissant la longueur de l'échantillon  $W$ , on peut en déduire sa déformation  $\epsilon = \frac{d-d_F}{W}$ , en tenant compte de l'allongement du capteur de force  $d_F = \frac{\Delta F}{K}$ ,  $\Delta F$  étant la variation de force appliquée et  $K$  la raideur du capteur. La mesure du déplacement  $d$  et de la force permettent de connaître le travail fourni à l'échantillon

pour le déformer. L'ordinateur enregistre également le signal amplifié et filtré issu du capteur de force, et son horloge nous permet d'avoir une base de temps avec une précision de l'ordre de la milliseconde.

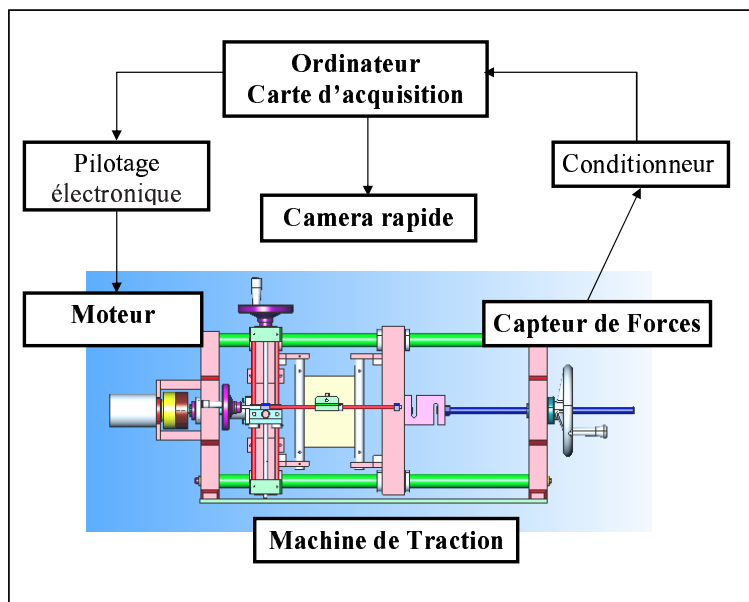


FIG. 2.3 – Schéma du système d'acquisition

De plus, le logiciel de contrôle du déplacement réalisé par le moteur nous permet d'imposer une rampe de déplacement à vitesse constante, une déformation, ou grâce à une boucle de rétroaction, une force constante. Pour les expériences à force imposée, cette boucle de rétroaction nous permet de maintenir la force appliquée à l'échantillon constante, alors que la fissure grandit, avec une stabilité comprise entre  $0.1N$  et  $0.5N$ , et des temps de réponse inférieurs à  $10ms$ .

#### 2.2.4 Caméra

Pour suivre la croissance de la fissure, nous utilisons une caméra haute résolution et (ultra)rapide (Ultima 1024, Photron). Cette caméra utilisant des capteurs CMOS, est capable d'acquérir des images à un taux de 500 images par secondes pour une résolution de  $1024 \times 1024$  pixels, et jusqu'à 16000 images par secondes à une résolution spatiale réduite  $32 \times 128$  pixels. Nous travaillerons à une résolution de  $1024 \times 512$  pixels. Dans ce cas, nous ne pouvons enregistrer que 1024 images, puisque l'espace mémoire embarqué sur la caméra est limité à  $500Mo$ .



Nous désirons suivre la croissance complète de la fissure, depuis la longueur initiale du défaut jusqu'à la rupture totale de l'échantillon. Or, la caméra ne peut acquérir qu'un nombre restreint d'images, soit 500 en résolution maximale de  $1024 \times 1024$  pixels. De plus, proche du seuil de rupture de l'échantillon, le temps d'enregistrement sur le disque de l'ordinateur est trop long pour que nous envisagions de transférer les images en temps réel, sans perdre des informations concernant l'avancement du défaut. Enfin, le temps de rupture étant inconnu, il ne peut donc évidemment pas servir à déterminer des intervalles de temps réguliers ou non pour acquérir des images. Pour contourner cette difficulté et pouvoir suivre malgré un nombre d'images limité toute la dynamique de rupture qui, comme nous l'observerons s'accélère, nous utilisons la déformation de l'échantillon, qui elle, en revanche, augmente toujours de manière approximativement équivalente, quel que soit le temps de rupture.

On utilise donc le signal de déplacement du moteur pas à pas pour déclencher la caméra : lorsque l'échantillon s'est allongé d'une valeur seuil que l'on choisit typiquement de  $1\mu m$  (parce que l'allongement de l'échantillon ne dépasse pas en général  $500\mu m$ ), la carte d'acquisition envoie un signal déclenchant la caméra qui enregistre alors 2 images à une fréquence d'acquisition typiquement de 250 images par seconde (ce qui nous donnera un ordre de grandeur de la vitesse instantanée de la fissure), à une résolution de  $1024 \times 512$  pixels. A cette résolution, nous ne pouvons enregistrer que 1024 images, puisque l'espace mémoire embarqué sur la caméra est limité à  $500 Mo$ . Ce procédé de déclenchement nous permet d'obtenir l'ensemble de la dynamique de rupture sous-critique de l'échantillon, et donc de suivre l'évolution de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à rupture de l'échantillon.

Une analyse des images recueillies par la caméra nous permet ensuite d'extraire la longueur de la fissure avec une résolution comprise entre 50 et  $150\mu m$  suivant le champ d'observation de la caméra, et enfin d'obtenir l'évolution temporelle du défaut initial.

## 2.3 Les échantillons

Nous avons réalisé des expériences sur divers matériaux en géométrie quasi bi-dimensionnelle : feuilles de papier, tissus, films de polycarbonate, feuilles de laiton et d'acier.

Les expériences ont été principalement menées sur un matériau hétérogène fibreux : des feuilles de papier.

### 2.3.1 Les feuilles de papier

Nous avons utilisé un unique type de papier : des feuilles de papier Fax de marque Alrey, achetées sous forme de rouleaux, l'épaisseur et la hauteur des feuilles étant bien calibrées. Le choix de travailler sur des échantillons de papier est motivé pour diverses raisons :

- **La géométrie plane**

La géométrie quasi bi-dimensionnelle facilite d'une part le suivi de l'avancement de la fissure et la mesure de la longueur de la fissure durant le processus de rupture. En effet en géométrie  $3d$ , il est en général délicat de suivre la dynamique de rupture car le front de fracture devient rugueux [49]. D'autre part, nous tenterons de comparer nos résultats expérimentaux à ceux numériques issus d'une simulation d'un réseau de ressorts  $2d$ .

La géométrie des échantillons est rectangulaire de longueur  $W = 24cm$ , de hauteur  $H = 20.95cm$  et d'épaisseur  $e_p = 50\mu m$  (fig.2.4).

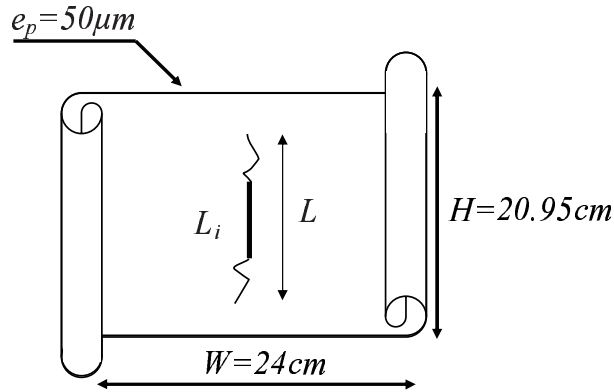


FIG. 2.4 – Géométrie des échantillons.

Nous réalisons au centre des feuilles une fente initiale de longueur  $L_i$  comprise entre 1 et 4 cm. Nous fixons nos échantillons et effectuons le chargement dans le sens de fabrication du rouleau de papier, perpendiculairement à la fissure initiale. Le mode de rupture est ainsi, un mode de traction pure dit mode 1.

- **Le comportement élastique**

Nous avons vérifié que macroscopiquement le processus de rupture est essentiellement fragile : la courbe fig.2.5 représentant la force appliquée à la feuille de papier  $F$  en fonction du déplacement du moteur  $d$ , lors d'un chargement à vitesse constante sur un échantillon sans défaut

macroscopique initial, montre un comportement approximativement linéaire jusqu'au moment de la rupture.

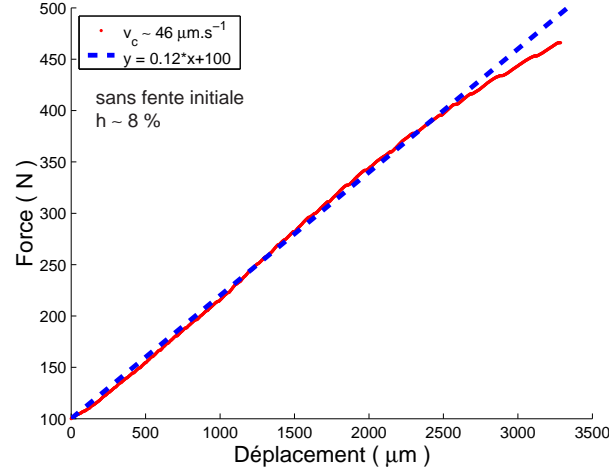


FIG. 2.5 – Force appliquée à la feuille en fonction du déplacement du moteur, pour un chargement à vitesse constante. La pente de la droite en traits pointillés d'équation  $y = 0.12x + 100$  permet d'estimer le module d'Young des feuilles de papier.

On remarque également sur la figure 2.6 que ce comportement linéaire, lors d'un chargement à vitesse constante, reste valable jusqu'au plateau de force imposée, même en présence de la fissure, avec une pente qui semble bien définie et qui dépend peu de la longueur de la fente initiale. Ensuite, le fluage en volume du papier et l'ouverture de la fissure entraîne une déformation de l'échantillon à force imposée.

On peut estimer le module d'Young de la feuille de papier qui relie la contrainte appliquée  $\sigma$  à la déformation de l'échantillon  $\epsilon$  :

$$\sigma = Y\epsilon \quad \text{et} \quad Y = \frac{\Delta F}{e_p H} \frac{W}{d_e}$$

avec respectivement  $e_p$ ,  $H$ ,  $W$  l'épaisseur, la hauteur et la longueur de la feuille,  $\Delta F$  la variation de force appliquée et  $d_e$  l'allongement de l'échantillon. On mesure l'allongement de l'échantillon  $d_e = d - d_F = d - (\Delta F)/K$  en retirant l'allongement du capteur de force  $d_F$  à la mesure du déplacement réalisé par le moteur  $d$ . On trouve alors, pour des expériences de traction à vitesse constante  $v_c \simeq 40 \mu\text{s}^{-1}$ , à un taux d'humidité  $h$  de l'ordre de  $h \simeq 5\%$ , et une température  $T \simeq 25^\circ\text{C}$ , que le module d'Young des échantillons de papier est typiquement  $Y = (3.3 \pm 0.4) 10^9 \text{ N.m}^{-2}$ . On remarque que la prise en compte de l'allongement

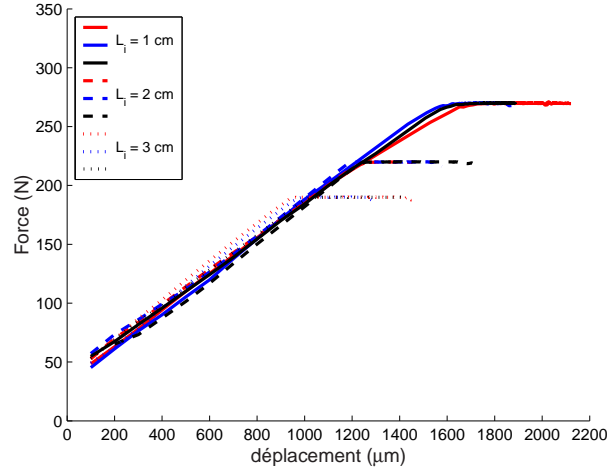


FIG. 2.6 – Force appliquée à la feuille  $F$  en fonction du déplacement du moteur pas à pas. Expérience de fluage : rampe de déplacement à vitesse constante jusqu'à la consigne, pour des échantillons ayant des longueurs de fente initiale  $L_i$  différentes.

du capteur de force  $d_F$  apporte une correction négligeable à la mesure du module d'Young, inférieure à 5%, et a fortiori bien inférieure à la dispersion de notre mesure de  $Y$ , soit  $Y = \frac{FW}{e_p H d (1 - \frac{F}{dK})} \simeq \frac{FW}{e_p H d}$ .

– ***La structure hétérogène et fibreuse***

Nos échantillons de papier ont une structure complexe. La structure microscopique est un réseau, quasi bi-dimensionnel, de fibres de cellulose aléatoirement orientées, comme le montre la figure 2.7. Une feuille en format A4 contient typiquement 10 millions de fibres.

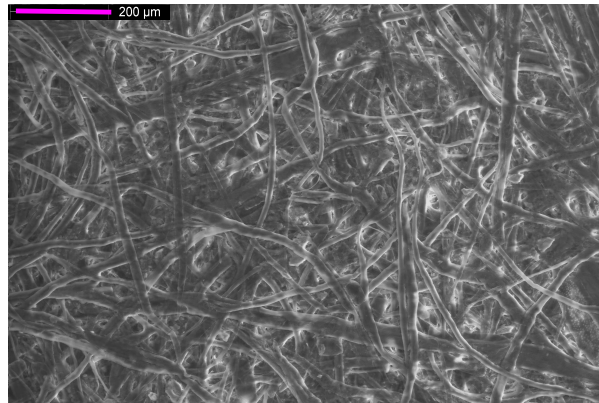


FIG. 2.7 – Imagerie réalisée sous microscope à balayage électronique, INSA Lyon.

La figure 2.8 représente un histogramme des tailles de fibres obtenu à partir de l'examen de 250 fibres extraites de l'image 2.7.

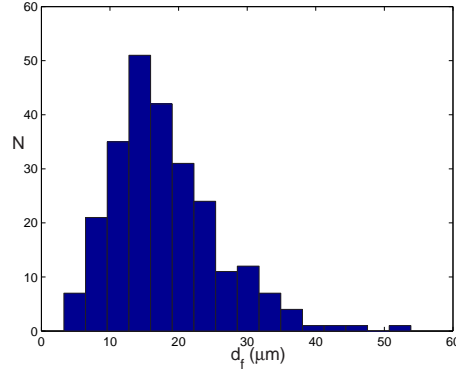


FIG. 2.8 – Histogramme du diamètre des fibres  $d_f$  à partir de l'analyse de 250 fibres relevées sur l'image 2.7.

Ainsi, cet histogramme 2.8 montre un diamètre de fibres variant entre 3 et  $54\mu m$  avec une taille moyenne de l'ordre de  $d_f = 18 \pm 1\mu m$  et un écart-type de  $8\mu m$ . Il faut remarquer que la structure d'une fibre est elle-même en couches, constituée d'un faisceau de microfibrilles, dont le diamètre peut être inférieur à la centaine de nanomètres.

### Remarques

#### – Rôle de l'humidité

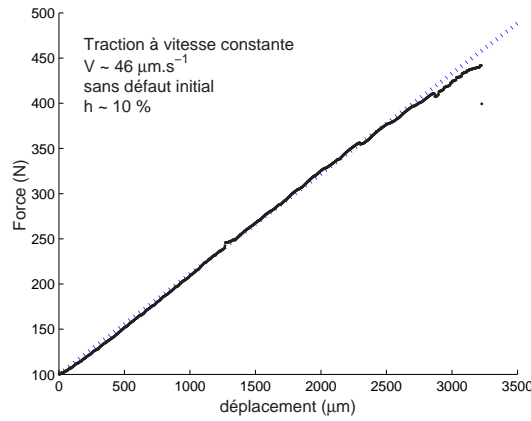


FIG. 2.9 – Force appliquée à la feuille en fonction du déplacement du moteur pas à pas, pour un chargement à vitesse constante, sur un échantillon sans fente initiale, à un taux d'humidité de  $h \sim 12\%$ .

L'humidité et la température modifient fortement les propriétés mécaniques du papier. La figure 2.9 montre le chargement à vitesse constante d'une feuille de papier ne comportant pas de défaut initial, réalisé à un taux d'humidité de  $h \sim 12\%$ . Cette expérience révèle que le module d'Young de l'échantillon est plus petit que celui mesuré en atmosphère plus sèche avec un taux d'humidité  $h \sim 5\%$ . On trouve en effet  $Y = 2.510^9 N.m^{-2}$ .

Si on peut remarquer que le module d'Young des échantillons de papier semble diminuer avec le taux d'humidité, on peut également observer que la force à laquelle l'échantillon casse, lors d'expériences de chargement à vitesse constante, décroît fortement avec le taux d'humidité  $h$ , comme le montre la figure 2.10.

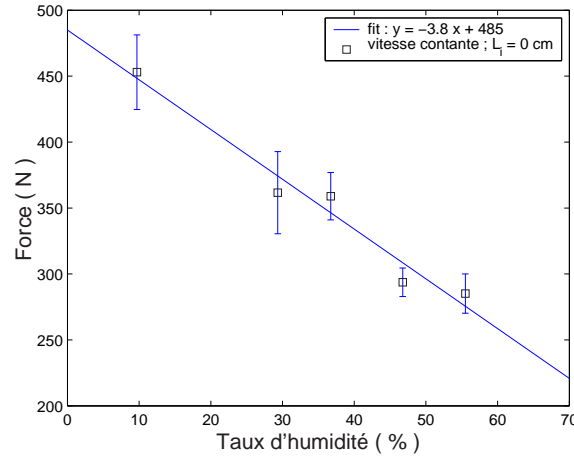


FIG. 2.10 – Force de rupture, moyennée sur un ensemble variant de 5 à 20 expériences de chargement à vitesse constante  $v_c \simeq 40 \mu.s^{-1}$ , en fonction du taux d'humidité  $h$ . Les échantillons ne comportent pas de défaut initial macroscopique. A titre indicatif on a représenté en trait plein l'ajustement linéaire :  $y = -3.8x + 485$ .

Aussi, il est très important de travailler dans des atmosphères conditionnées. Ainsi, avant d'effectuer nos expériences de fluage, les échantillons sont conservés pour une durée de 24 heures au minimum dans une boîte, où nous maintenons le taux d'humidité à un taux inférieur à 10%, au moyen de cristaux absorbant l'eau. De plus, la machine de traction est placée elle-même dans une enceinte où nous contrôlons le taux d'humidité, en réalisant une circulation d'air sec. (Nous utilisons l'air comprimé du laboratoire que nous filtrons). Toutes nos expériences de fluage ont donc été menées à un taux d'humidité  $h = 5 \pm 2\%$ .

– *Le comportement visco-élastique*

Nous avons pu observer que les échantillons de papier offrent un comportement visco-élastique, en réalisant des expériences à déformation imposée. Nous appliquons à nos échantillons des chargements à vitesse constante jusqu'à un déplacement donné, puis nous examinons la relaxation de la force appliquée aux échantillons.

La figure 2.11 où nous avons représenté la force normalisée par la force maximum atteinte durant le chargement,  $F_{norm} = \frac{F}{max(F)}$  en fonction du temps, nous permet de visualiser cette relaxation.

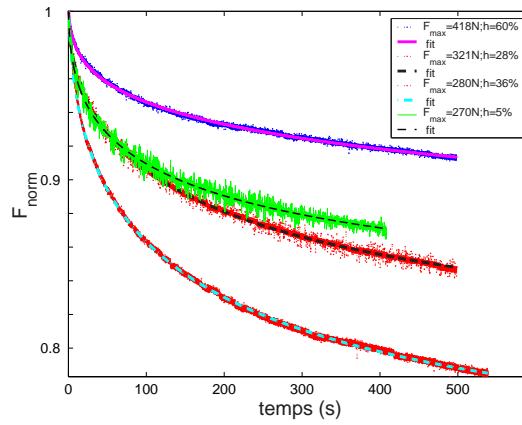


FIG. 2.11 – Evolution temporelle de la force appliquée normalisée, pour différentes expériences à déformation imposée. Nous avons superposé aux données expérimentales des ajustements du type "exponentiel étiré" :  $F_{norm} = A \exp(-(t/t_c)^\nu) + B$ , où les paramètres A et B sont fixés par l'amplitude de la relaxation.

L'analyse de cette relaxation montre que les meilleurs ajustements des données sont du type "exponentiel étiré" :  $F_{norm} = A \exp(-(t/t_c)^\nu) + B$ , où les paramètres A et B sont fixés par l'amplitude de la relaxation. Nous pouvons extraire alors un temps caractéristique  $t_c$  qui apparaît du même ordre pour les différentes expériences  $t_c \sim 200s$ . L'exposant  $\nu$  obtenu pour les différents ajustements est également robuste de l'ordre de  $\nu \sim 0.5$ .

La figure 2.11 met en évidence que l'amplitude de cette relaxation complexe diminue avec la force appliquée à l'échantillon. Nous observons également que l'humidité modifie fortement cette relaxation (nous avons signalé précédemment que le module d'Young des échantillons décroît avec le taux d'humidité). Enfin, nous avons également remarqué un phénomène de vieillissement des échantillons de papier : en réalisant plusieurs expériences à la suite, l'amplitude de la relaxation semble dé-

pendre des expériences précédentes. Ces observations ont notamment motivé la procédure expérimentale (conservation des échantillons à un même taux d'humidité ...).

Ces résultats mettent en évidence un comportement visco-élastique complexe, similaire au phénomène de déformation lente des échantillons de papier, que nous observerons lors d'expériences de chargement à force constante (expériences dites de fluage). Au chapitre suivant, nous analyserons cette déformation lente des feuilles de papier. Nous montrerons d'une part qu'elle apparaît en volume dans tout l'échantillon, et d'autre part qu'elle n'est pas corrélée à l'endommagement de l'échantillon. Nous signalons que notre approche théorique décrivant la croissance lente de la fissure ne prendra pas en compte ces effets visco-élastiques.

– ***Traitement de surface***

Le papier Fax utilisé est un papier dit thermique : des composants chimiques (leuco-colorant et révélateur) sont couchés sur une des surfaces de nos feuilles. La chaleur transmise à la surface du papier développera alors la couleur par réaction chimique à la rencontre de ces composants. L'épaisseur de cette couche est de l'ordre de quelques microns.

### 2.3.2 Les autres échantillons utilisés

Nous avons également étudié la dynamique de rupture d'autres matériaux, de nature et de structure complètement différente du papier. Ainsi, nous avons mis sous tension et réalisé des expériences de fluage sur des échantillons de *tissu*, des *films de polycarbonate*, des *feuilles d'acier et de laiton*. Nous avons utilisé la même procédure décrite précédemment (paragraphe 2.1), les divers échantillons étudiés étant toujours de géométrie quasi bi-dimensionnelle.

L'utilisation de ces divers matériaux est motivée pour différentes raisons : dans un premier temps, nous voulons mettre en évidence un phénomène d'endommagement progressif et en particulier la croissance lente sous-critique d'une fissure, dans divers matériaux, comme l'a observé Zhurkov [39]. Nous désirons également comparer le comportement sous chargement et en particulier la dynamique de rupture de ces divers matériaux, qui ont des lois de comportement macroscopique différentes (élastique, plastique, visco-élastique). Les objectifs sont multiples : d'une part mettre en évidence l'importance de la structure (structure fibreuse pour les feuilles de papier, le tissu et voire même pour le polycarbonate, morphologie "granuleuse" pour les métaux) et le rôle de la taille des hétérogénéités (qui peuvent être à l'échelle du cristal -dislocations- pour les métaux, au niveau moléculaire pour les polymères, la



taille des fibres dans les feuilles de papier) dans la dynamique de fracturation lente. D'autre part, nous présenterons dans les chapitres suivants un modèle décrivant la croissance lente d'une fissure dans des matériaux élastiques. En réalisant des expériences sur des matériaux comme les films de polycarbonate ou des feuilles de métaux, ayant des lois de comportement viscoélastique et plastique, nous pourrions tester les limites de notre approche théorique. On peut remarquer également que la dépendance des propriétés mécaniques des feuilles de papier en fonction du taux d'humidité nous oblige à adopter une procédure expérimentale contraignante.

– Polymères

Nous avons utilisé des feuilles de polycarbonate. La dimension des échantillons est identique à celle des feuilles de papier : longueur  $W = 24\text{cm}$ , hauteur  $H = 21\text{cm}$ . L'épaisseur des films de polycarbonate est plus importante  $e_p = 125\mu\text{m}$ . On peut être tenté de comparer la structure des films de polycarbonate à celles des feuilles de papier. Ces films ont effectivement une microstructure amorphe : les polymères constitués d'un assemblage de macromolécules, sont aléatoirement orientés, et forment un réseau désordonné ; cependant, l'échelle est évidemment beaucoup plus petite que dans le papier : le volume élémentaire correspond à la taille d'un monomère.

La figure 2.13 montre la force appliquée  $F$  en fonction de la déformation de la feuille, lors d'un chargement à vitesse constante  $v = 10\mu\text{m.s}^{-1}$  d'une feuille de polycarbonate sans défaut initial.

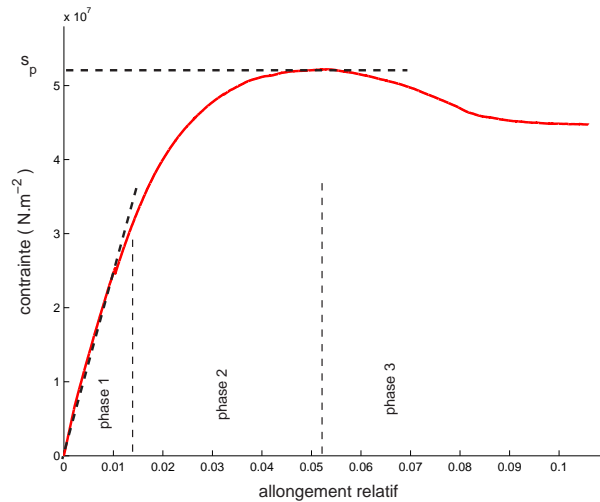


FIG. 2.12 – Force appliquée  $F$  en fonction de la déformation de l'échantillon, lors d'une expérience de fluage : chargement à vitesse constante  $v = 10\mu\text{m.s}^{-1}$  d'une feuille de polycarbonate sans défaut initial.

L'analyse de l'allongement de l'échantillon en fonction de la force appliquée, met en évidence plusieurs phases, que l'on observe sur la figure 2.13. La première correspond à une croissance linéaire de la contrainte en fonction de l'allongement, traduisant le caractère élastique des films de polycarbonate pour les faibles allongements. La pente de cette partie linéaire nous permet d'estimer le module d'Young de nos échantillons :  $Y = 1.94 \cdot 10^9 N.m^{-2}$ . Dans la seconde phase, la relation entre la contrainte appliquée et l'allongement du film n'est plus linéaire, montrant le caractère plastique des films de polycarbonate : des croix et des bandes de cisaillement apparaissent dans l'échantillon. Enfin, dans la troisième phase, la contrainte décroît avec l'allongement de l'échantillon. Certaines bandes de cisaillement se développent alors dans tout l'échantillon.

Ce comportement de la contrainte en fonction de l'allongement est caractéristique des matériaux plastiques, avec une contrainte maximale correspondant au seuil de plasticité  $s_p = 5.2 \cdot 10^8 N.m^{-2}$ . Ces résultats sont en bon accord avec d'autres mesures effectuées sur des échantillons volumique [64].

- Tissus

La dimension des échantillons de tissus utilisés est plus petite typiquement  $15cm \times 15cm$ , mais l'allongement des échantillons lors d'une expérience de fluage est très important, de plusieurs centimètres. La structure de ce matériau offre un réseau bi-dimensionnel parfait à une échelle millimétrique.

- Métaux

Les métaux étudiés sont des feuilles d'acier et de laiton.

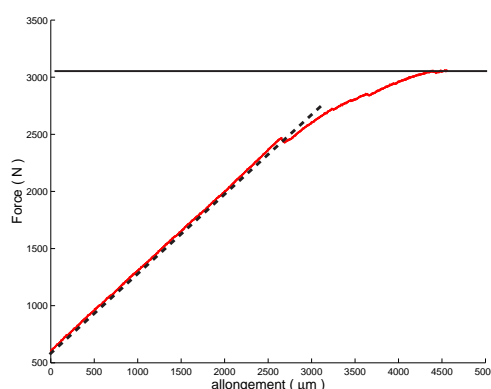


FIG. 2.13 – Force appliquée à une feuille de laiton ( $15 \times 15cm$ ) sans défaut initial en fonction de l'allongement de l'échantillon, lors d'une expérience de chargement à vitesse constante  $v \sim 40 \mu m.s^{-1}$ .

Les échantillons sont carrés de côté  $H = 15\text{cm}$ , et d'épaisseur  $e_p = 50\mu\text{m}$ . Les courbes de la contrainte en fonction de l'allongement montrent le comportement caractéristique élasto-plastique attendu. Nous avons des difficultés pour fixer les échantillons et atteindre des forces importantes (on peut remarquer que pour ces expériences, nous avons dû changer de capteur de force). Cependant, on peut noter, que pour les expériences de chargement à force constante sur des échantillons comportant un défaut initial, nous travaillerons toujours dans la zone de faible allongement, où le matériau ne se déforme pas encore de manière plastique. On obtient un module d'Young pour les échantillons de laiton :  $Y = 14 \cdot 10^9 \text{N.m}^{-2}$ .

### 2.3.3 Flambage

A cause de la faible épaisseur des échantillons utilisés, lors de nos expériences de fluage, on peut observer une instabilité dite de flambage, se traduisant par l'apparition d'ondulations dans la direction perpendiculaire au chargement [22].

Pour des échantillons comportant une fissure, on peut observer un motif caractéristique en forme de croix (nommé "Croix de Malte" [53]), dont l'amplitude et la longueur d'onde varient en fonction de la longueur de la fissure. La figure 2.14 permet de visualiser cette instabilité lors d'une expérience sur une feuille de polycarbonate.

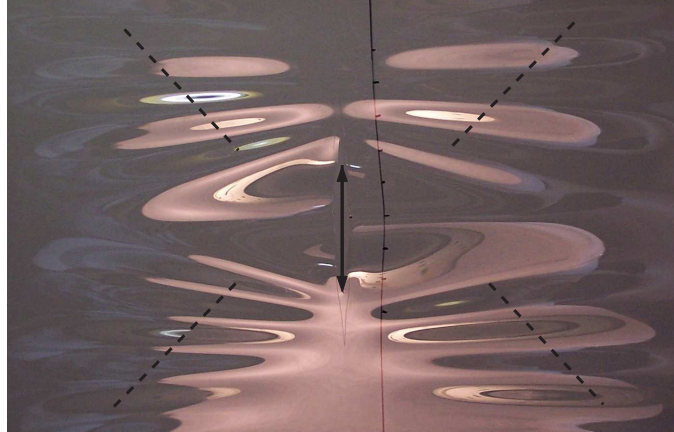


FIG. 2.14 – Visualisation de l'instabilité de flambage, lorsqu'on soumet une feuille de polycarbonate avec une fente de longueur  $L \sim 4\text{cm}$  à un chargement constant.

Il faut remarquer que cet effet est beaucoup plus important sur ces échantillons de polymères que sur les feuilles de papier.

## 2.4 Protocole expérimental

Nous concluons le chapitre décrivant notre dispositif expérimental, en rappelant la procédure que nous avons adoptée. En effet, dans nos expériences de fluage, sur des échantillons de papier, la procédure expérimentale revêt une très grande importance. Ainsi, afin d'assurer la reproductibilité de nos résultats expérimentaux, toutes nos expériences de chargement à force imposée ont été réalisées selon le protocole suivant :

- Conservation des échantillons pendant 24 heures minimum, en atmosphère sèche avec un taux d'humidité  $h < 10\%$ .
- Mise en place des échantillons dans la machine de traction (feuilles de papier scotchées et enroulées autour des barreaux cylindriques et fixation des barreaux). Durant cette procédure, les échantillons sont en contact avec l'atmosphère ambiante durant 10mn maximum.
- Circulation d'air sec dans l'enceinte contenant la machine de traction, afin d'y baisser le taux d'humidité jusqu'à atteindre une valeur de  $h \sim 5\%$ . Cette procédure dure environ 15mn. La circulation d'air sec est conservée durant l'expérience afin de maintenir le taux d'humidité autour de 5%.
- Mise en tension légère de l'échantillon jusqu'à une force de l'ordre de  $F \sim 50N$  (afin de réaliser une entaille initiale propre).
- Réalisation de manière précise de l'entaille initiale à la longueur désirée grâce à notre système de vis micrométriques et notre jeu de lames de rasoirs calibrées.
- Chargement jusqu'à la force désirée (rampe de déplacement rapide jusqu'à la consigne i.e la force désirée, puis maintien de cette consigne grâce à la boucle de rétroaction) et suivi de la croissance du défaut initial jusqu'à rupture complète de l'échantillon.



# Chapitre 3

## Résultats Expérimentaux

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Observations préliminaires . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1.1	Signal de force . . . . .	45
3.1.2	Signal de déformation . . . . .	46
3.1.3	Analyse d'images . . . . .	48
3.1.4	Croissance du défaut . . . . .	49
<b>3.2</b>	<b>Analyse de la dynamique moyenne . . . . .</b>	<b>52</b>
3.2.1	Longueur critique $L_C$ . . . . .	54
3.2.2	Comparaison $L_G/L_C$ . . . . .	59
3.2.3	Longueur de croissance caractéristique $\zeta$ . . . . .	64
3.2.4	Temps de rupture $\tau$ . . . . .	67
3.2.5	Vitesse d'avancement moyenne . . . . .	76
<b>3.3</b>	<b>Analyse de la dynamique intermittente . . . . .</b>	<b>78</b>
3.3.1	Détection des sauts . . . . .	79
3.3.2	Sauts de longueur . . . . .	81
3.3.3	Temps d'attente . . . . .	83
<b>3.4</b>	<b>Expériences de fluage sur d'autres matériaux . . .</b>	<b>85</b>
3.4.1	Les films de polycarbonate . . . . .	86
3.4.2	Les rideaux . . . . .	88
3.4.3	Les feuilles d'acier et de laiton . . . . .	89
3.4.4	Rôle de la structure et des hétérogénéités . . . . .	90
3.4.5	Conclusion . . . . .	90

---

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'expériences de chargement à force constante (dites de fluage), sur les divers matériaux présentés au chapitre précédent.

Nos expériences ont été principalement menées sur des échantillons de papier comportant un défaut initial de longueur  $L_i$ . Nous allons examiner en détail la dynamique de croissance de la fissure. Nous révélons un processus de rupture sous-critique où la fissure avance par sauts depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_c$  où la rupture est alors brutale. Nous avons développé une approche statistique afin de caractériser d'une part la dynamique moyenne de croissance du défaut et d'autre part d'analyser les sauts de longueur et les temps d'attente durant le processus de rupture.

Comparant les résultats d'expériences de fluages sur les différents matériaux utilisés, la conclusion motivera l'approche théorique que nous développerons par la suite.

## 3.1 Observations préliminaires

Nous montrons dans un premier temps les signaux de force et de déformation typiquement observés lors de nos expériences de fluage.

### 3.1.1 Signal de force

La figure 3.1 représente le signal de force obtenu pour une expérience de fluage à  $F = 180N$  avec  $L_i = 3cm$ . Ce signal peut être décomposé en 3 parties. Dans un premier temps, le chargement de l'échantillon jusqu'à la consigne est effectué le plus rapidement possible (temps de montée  $t_m \sim 30s$ ) compte tenu de la vitesse maximale du moteur pas à pas (phase 1). Ensuite, sur la figure 3.1 en insert, nous vérifions que notre système de rétroaction maintient la force appliquée à l'échantillon constante à la valeur désirée (soit ici  $F = 180N$ ) avec des fluctuations inférieures à  $0.5N$  (phase 2). Enfin, l'échantillon casse soudainement, la force chute de plus de  $50N$  en moins d'une seconde (phase 3).

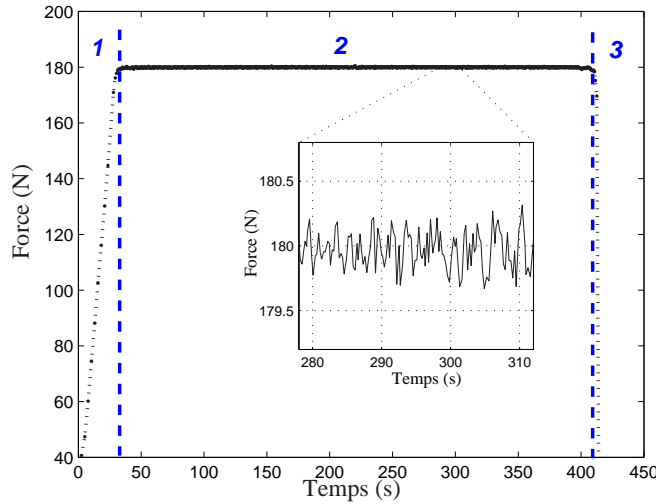


FIG. 3.1 – Signal de force en fonction du temps pour une expérience de fluage à  $F = 180N$  et  $L_i = 3cm$ . On note les 3 zones correspondant respectivement au chargement (1), au maintien de la force constante (2), et à la rupture brutale de l'échantillon (3). En insert : zoom du signal de force en fonction du temps, dans la zone (2) où la force est imposée.

Nous pouvons parfois détecter une chute du signal de force de l'ordre de  $1N$  qui correspond à des événements de fracturation importants, (car le



module élastique décroît sensiblement et la rétroaction n'est alors pas suffisamment rapide pour maintenir la force constante). Cependant, la sensibilité n'est pas suffisante pour détecter la plupart des événements de fracture. L'examen direct du signal de force ne nous permet donc pas d'étudier l'endommagement de l'échantillon.

### 3.1.2 Signal de déformation

La figure 3.2 montre la déformation typique de la feuille de papier durant la même expérience de chargement à force constante  $F = 180N$  avec  $L_i = 3cm$ .

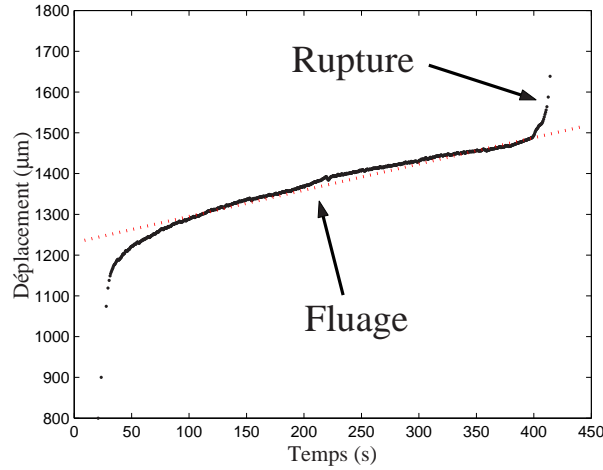


FIG. 3.2 – Allongement de l'échantillon durant une expérience de fluage à force constante  $F = 180N$  et  $L_i = 3cm$ .

Nous observons un phénomène de déformation lente de l'échantillon lorsque nous maintenons la force appliquée constante. Ce phénomène, dit de fluage, a donné son nom aux expériences de chargement à force constante, et traduit effectivement la déformation lente de l'échantillon lors de telles expériences.

D'abord, on peut observer sur les figures 3.3, que ce comportement de fluage, lors d'expériences réalisées sur des échantillons sans fente, est pratiquement identique aux déformations observées sur des échantillons comportant un défaut macroscopique initial. On peut donc raisonnablement penser que le fluage observé n'est pas localisé autour de la fissure, mais probablement en volume dans tout l'échantillon (il n'y a cependant pas d'observation directe de cela).

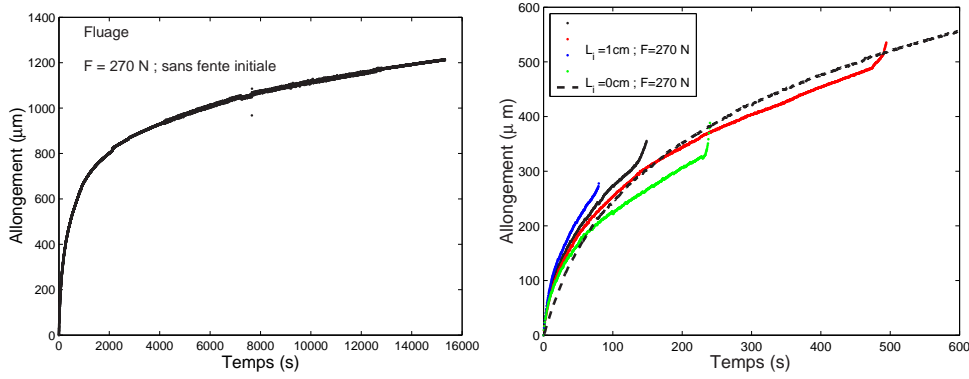


FIG. 3.3 – Allongement de l'échantillon en fonction du temps. A gauche : chargement à force constante  $F = 270\text{ N}$ , sans fente initiale. Le phénomène de fluage est volumique. A droite : on a superposé cette même expérience de fluage sans fente initiale à 4 expériences de chargement à la même force constante  $F = 270\text{ N}$  et avec une longueur de fente initiale  $L_i = 1\text{ cm}$ . Le phénomène de fluage dépend peu de l'endommagement du matériau.

Ensuite, on peut remarquer sur les figures 3.3, que la déformation de l'échantillon augmente avec le temps. Cependant, nous observons dans toutes les expériences réalisées à  $L_i = 1\text{ cm}$  reportées sur la figure 3.3 de droite, que l'endommagement lié à la rupture est sensiblement le même (puisque la fissure croît de  $L_i = 1\text{ cm}$  jusqu'à  $L_C \simeq 3\text{ cm}$ ), pour des temps de rupture différents. Nous montrons donc que la déformation liée au fluage n'est pas corrélée à l'endommagement.

Nous avons évoqué au chapitre précédent que nous utilisons le signal d'allongement de l'échantillon pour déclencher la caméra et suivre la croissance de la fissure. Décrivons de manière plus détaillée, à partir du signal 3.2, cette méthode qui nous permet effectivement d'obtenir toute la dynamique de rupture de l'échantillon, malgré un nombre d'images à acquérir limité. On note sur la figure 3.2 que pour les conditions expérimentales  $L_i = 3\text{ cm}$  et  $F = 180\text{ N}$ , l'échantillon s'allonge typiquement de  $500\mu\text{m}$ , pendant le maintien de la force à  $F = 180\text{ N}$ . A partir du signal d'allongement de l'échantillon, nous déclenchons la caméra : lorsque l'échantillon s'allonge typiquement de  $1\mu\text{m}$ , la caméra enregistre deux images à un taux de 250 images par secondes. Ainsi, nous obtenons environ 1000 images du processus d'endommagement jusqu'à la rupture finale. L'avantage de cette méthode est de nous permettre de suivre la propagation lente du défaut et d'obtenir beaucoup d'images lorsque l'avancement de la fissure s'accélère, juste avant la rupture finale. De plus, il faut remarquer que la variation de l'amplitude du fluage est beaucoup

plus faible que celle des temps de rupture, ce qui rend notre méthode de suivi de la croissance de la fissure robuste. Ceci nous permet donc d'enregistrer un nombre d'images optimal (soit 1000) pour une expérience dans des conditions fixées.

Enfin, après une analyse de chacune de ces images enregistrées, nous pourrions obtenir l'évolution de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à la rupture.

### 3.1.3 Analyse d'images

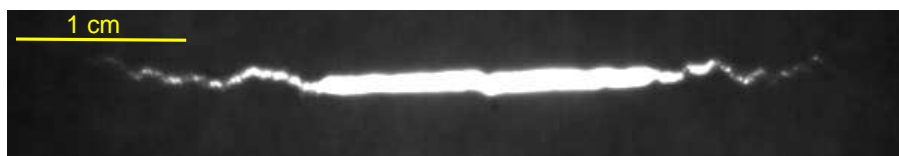


FIG. 3.4 – Image (zoom) typique obtenue au cours d'une expérience de fluage :  $L_i = 2\text{cm}$  et  $F = 220\text{N}$ .

La figure 3.4 montre le zoom d'une image typique enregistrée par la caméra lors d'une expérience de fluage. Lors de cette expérience, le défaut avait pour longueur initiale  $L_i = 2\text{cm}$ , et la force appliquée était  $F = 220\text{N}$ . Nous éclairons la feuille de papier et la caméra recueille l'intensité lumineuse transmise. On remarque que le front de fracture est rugueux ; la fissure grandit suivant une trajectoire sinueuse.

#### Extraction de la longueur de la fissure

Les images enregistrées sont numérisées sur 8 bits, c'est à dire codée sur 256 niveaux de gris, variant de 0 (noir) à 255 (blanc). Le contraste est tel que la détection du contour de la fissure par seuillage ou par une technique de maximum de gradient est possible.

L'analyse d'images est effectuée au moyen du logiciel Matlab, muni de bibliothèques d'analyse d'images. Nous détectons le contour de la fente en déterminant la position des maxima des gradients verticaux d'intensité (direction perpendiculaire à la fissure).

Sur la figure 3.5 nous représentons le contour de la fissure (en blanc) détecté suivant cette technique de maximum de gradient d'intensité, superposé à l'image enregistrée par la caméra (nous avons inversé le contraste).

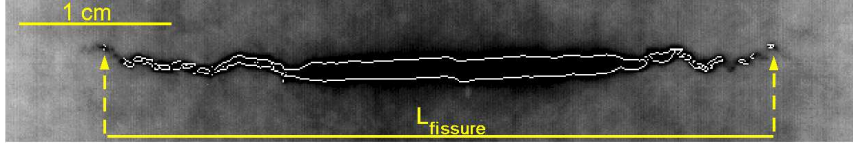


FIG. 3.5 – Superposition du contour détecté en blanc et image enregistrée. On extrait la longueur de la fissure projetée dans la direction principale de propagation de la fissure, à partir des extrema détectés.

Il faut remarquer aussi bien sur l'image enregistrée par la caméra 3.4 et sur la figure représentant le contour détecté 3.5, que les éléments de fracturation détectés à la pointe de la fissure ne semblent pas être connectés. Nous choisirons toutefois de considérer que les extrema détectés donnent la longueur de la fissure. Cette longueur n'est évidemment pas celle du contour sinueux de la fissure, mais la longueur projetée sur la direction principale de propagation. Cette longueur projetée donne effectivement la contribution principale au facteur d'intensité de contraintes  $K$  qui mesure la divergence de l'amplitude de la contrainte à la pointe du défaut :  $K \sim \sigma\sqrt{L}$  où  $L$  est la longueur projetée et  $\sigma$  la contrainte appliquée à l'échantillon. Désormais, lorsque nous parlons de la longueur de la fissure, nous considérons sauf précision la longueur de la fissure projetée selon la direction principale de propagation du défaut.

Ce procédé de détection permet donc d'extraire la longueur de la fissure avec une précision de l'ordre de 1 pixel. Le champ de la caméra variant (selon la longueur de la fente initiale et la force appliquée) typiquement entre 5 et 15 cm, nous obtenons ainsi une résolution de 50 à 150  $\mu m$ .

### 3.1.4 Croissance du défaut

Après l'analyse de chacune des images enregistrées durant une expérience, nous obtenons l'évolution de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à la rupture de l'échantillon.

#### Mise en évidence d'une dynamique intermittente

Les figures 3.6 et 3.7 montrent des courbes de croissance typiques que l'on a observées lors d'expériences de fluage avec pour longueur du défaut initial  $L_i = 1 cm$  et  $F = 270 N$  comme force appliquée.

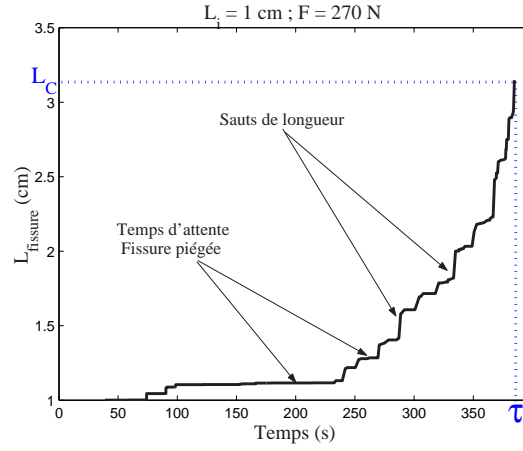


FIG. 3.6 – Evolution temporelle de la fissure pour une expérience de fluage : la feuille de papier est soumise à une force  $F = 270 \text{ N}$  et comporte une fente de longueur initiale  $L_i = 1 \text{ cm}$ .

Nous préférons représenter comme sur la figure 3.7, le temps en fonction de la longueur de la fissure (au lieu de la représentation habituelle longueur en fonction du temps), afin de mettre en évidence par la suite le comportement moyen à l'approche du temps de rupture  $\tau$ .

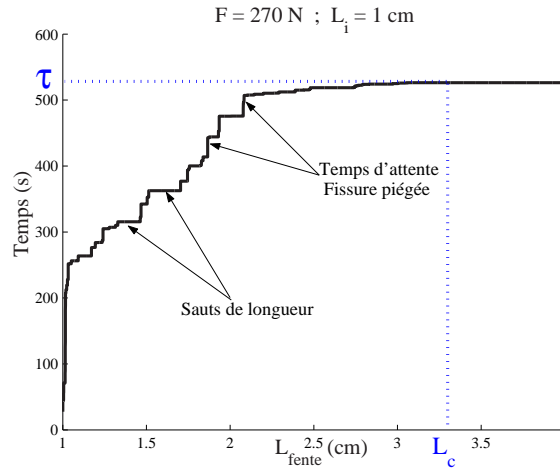


FIG. 3.7 – Evolution temporelle de la fissure (représentation *Temps vs Longueur*), pour une *autre* expérience de fluage dans les mêmes conditions : la force appliquée à la feuille de papier avec un défaut initial de longueur  $L_i = 1 \text{ cm}$  est  $F = 270 \text{ N}$ .

On remarque clairement que la fissure n'avance pas de façon régulière. Le défaut de longueur initiale  $L_i$  grandit par sauts jusqu'à atteindre une longueur critique  $L_C$  (ici de l'ordre de  $3\text{cm}$ ), où l'échantillon entier casse soudainement (la fissure traverse alors tout l'échantillon soit environ  $18\text{cm}$  pour cette expérience, en moins d'une seconde, avec une vitesse d'avancement telle que  $V \gtrsim 0.5\text{m/s}$ ). La croissance de la fissure est effectivement très intermittente : on observe des temps d'attente pendant lesquels la fissure reste piégée et n'avance pas, puis soudainement la fissure va effectuer un saut de longueur  $s$ .

Les observations expérimentales montrent en général une augmentation de la vitesse d'avancement de la fissure  $V$  avec le facteur d'intensité des contraintes  $K$ , ce que nous observons effectivement dans nos expériences. Comme lors de nos expériences de fluage nous maintenons la force constante grâce à notre boucle de rétroaction, alors que la fissure grandit, l'amplitude de la contrainte à la pointe de la fissure augmente (le facteur d'intensité des contraintes  $K$  augmente avec la longueur de la fissure  $L$ ,  $K \sim \sigma\sqrt{L}$ ), provoquant ainsi une accélération de l'avancement de la fissure.

La représentation *Temps vs Longueur* permet également de bien mettre en évidence la forte dispersion des temps de rupture pour des expériences réalisées dans les mêmes conditions. On peut effectivement l'observer sur la figure 3.8 qui représente la croissance de la fissure pour 3 expériences réalisées dans des conditions expérimentales identiques : longueur de fente initiale  $L_i = 1\text{cm}$ , force appliquée  $F = 270\text{N}$ , taux d'humidité  $h = 5 \pm 0.4\%$ , et température  $T = 25.4 \pm 1.2^\circ\text{C}$ .

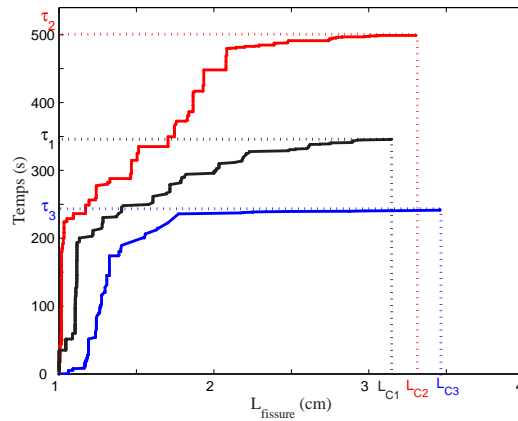


FIG. 3.8 – Croissance de la fissure pour 3 expériences de fluage réalisées dans les mêmes conditions : longueur de fente initiale  $L_i = 1\text{cm}$ , force appliquée  $F = 270\text{N}$ , taux d'humidité  $h = 5 \pm 0.4\%$ , et Température  $T = 25.4 \pm 1.2^\circ\text{C}$ .

On retrouve pour ces 3 expériences une dynamique d'avancement par sauts, observée précédemment, depuis la longueur de fente initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$ . De plus, les longueurs critique de rupture mesurées sont proches : on obtient ici pour ces 3 expériences  $L_C = 3.2 \pm 0.3 \text{ cm}$ , longueur critique juste avant la rupture qui se produit alors en moins de  $0.5 \text{ s}$ .

Cependant, si l'approche de cette longueur critique  $L_C$  qui apparaît bien définie (à paramètres expérimentaux fixés) s'opère de façon similaire, les valeurs des temps de rupture  $\tau$  sont très différentes. Bien que nous travaillions dans des conditions expérimentales identiques, cette dispersion des temps de rupture  $\tau$  est forte, puisque pour 10 expériences réalisées dans les mêmes conditions, l'écart-type des temps de rupture observés est de l'ordre du temps de rupture moyen (ce qui est caractéristique d'une distribution poissonnienne).

Ainsi, afin d'obtenir une meilleure compréhension du processus de rupture, une approche statistique apparaît nécessaire. Nous avons donc répété pour un ensemble de paramètres expérimentaux  $\{L_i, F\}$  (longueur de fente initiale et force appliquée) fixés, jusqu'à 20 expériences, dans les mêmes conditions de température  $T$  et d'humidité  $h$ . Par la suite, nous examinerons en détail cette dynamique de croissance par sauts, en faisant varier la force appliquée à l'échantillon entre  $F = 140 \text{ N}$  et  $F = 280 \text{ N}$ , et la longueur de la fente initiale entre  $L_i = 1 \text{ cm}$  et  $L_i = 4 \text{ cm}$ , correspondant à un facteur d'intensité de contraintes initial  $K_i$  entre  $2.7 \text{ MPa.m}^{1/2}$  et  $4.2 \text{ MPa.m}^{1/2}$ .

### 3.2 Analyse de la dynamique moyenne

Afin de caractériser la dynamique globale d'avancement du défaut, nous allons examiner le temps moyen  $\langle t(L) \rangle$  pour que la fissure atteigne une certaine longueur  $L$ .

Bien que la distribution des temps de rupture des échantillons soit très large, et que la dynamique de croissance d'un défaut soit très intermittente, la courbe 3.9 représentant l'évolution de la fissure moyennée sur 11 expériences offre un comportement assez régulier, depuis la longueur de fente initiale jusqu'à une longueur critique  $L_C$ .

La courbe d'évolution moyenne apparaît proche d'une exponentielle déterminée par deux paramètres : le temps de rupture moyen  $\tau$  et une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ . Comme le temps de rupture moyen est évidemment connu (avec une erreur statistique qui peut être importante), nous pouvons réaliser un ajustement des données expérimentales du type  $\frac{\langle t(L) \rangle}{\tau} = 1 - e^{-\frac{L-L_i}{\zeta}}$ , avec comme unique paramètre ajustable une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ . On peut remarquer alors que le temps de rupture  $\tau$  correspond à la longueur critique de rupture  $L_C$  si  $\frac{L_C-L_i}{\zeta} \gg 1$ . Nous

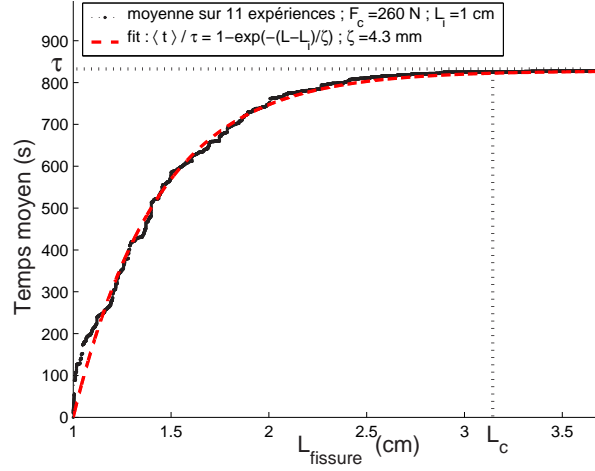


FIG. 3.9 – Temps moyen  $t$  pour que la fissure atteigne une longueur de fissure  $L$ . La moyenne est effectuée sur dix expériences réalisées dans des conditions identiques  $\{L_i = 1\text{cm}, \text{ et } F = 260\text{N}\}$ . La courbe en traits discontinus rouges représente l'ajustement des données  $\frac{\langle t(L) \rangle}{\tau} = 1 - e^{-\frac{L-L_i}{\zeta}}$ , avec  $\zeta$  comme paramètre libre.

représentons sur la figure 3.9, le résultat du fit (en traits discontinus) : nous pouvons vérifier que la courbe de croissance moyenne du défaut est effectivement bien décrite par une approche exponentielle du temps de rupture, avec pour longueur caractéristique de croissance  $\zeta = 4.3\text{mm}$ . Comme on a mesuré  $L_C = 3.1\text{cm}$ , on peut vérifier que  $\frac{L_C - L_i}{\zeta} \simeq 5 > 1$  et donc  $\langle t(L_C) \rangle \simeq \tau = 828\text{s}$ .

Nous pouvons alors utiliser la même procédure, pour chaque ensemble d'expériences réalisées à paramètres expérimentaux  $L_i, F$  fixées, en déterminant la longueur caractéristique de croissance  $\zeta$  comme seul paramètre de fit.

Sur la figure 3.10, nous représentons le temps moyen  $\langle t \rangle$  normalisé par le temps de rupture moyen de l'échantillon  $\tau$  en fonction de la longueur de la fissure normalisée  $\frac{L-L_i}{\zeta}$ , pour différentes longueurs de fente initiale  $L_i$  ( $1\text{cm} < L_i < 4\text{cm}$ ) et forces appliquées  $F$  ( $160\text{N} < F < 280\text{N}$ ). Chaque courbe est obtenue en moyennant sur un ensemble de 5 à 20 réalisations. Nous mettons en évidence une remise à l'échelle très satisfaisante pour l'ensemble de ces diverses expériences, correspondant à l'approche exponentielle du temps de rupture décrite précédemment  $\frac{\langle t \rangle}{\tau} = 1 - e^{-\frac{L-L_i}{\zeta}}$ . De plus, nous avons vérifié que les courbes montrant une remise à l'échelle moins bonne correspondent au cas où nous manquons de statistiques (moyenne sur seulement 5 expériences).



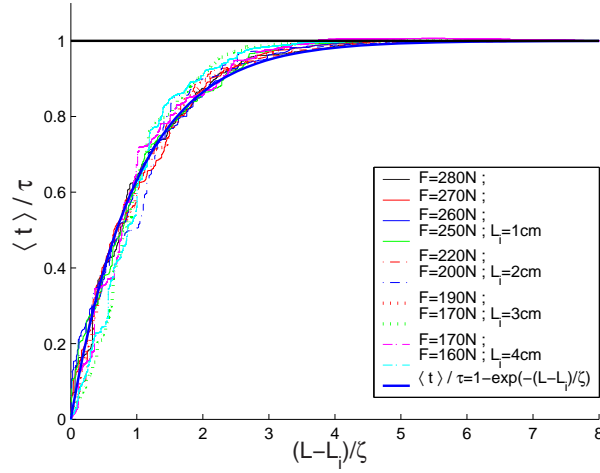


FIG. 3.10 – Temps d'évolution moyen  $\langle t \rangle$  normalisé par le temps de rupture moyen  $\tau$ , en fonction de la longueur de fissure normalisée par la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$ .

Nous allons maintenant examiner les divers paramètres  $L_C$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  caractérisant la croissance moyenne du défaut.

### 3.2.1 Longueur critique $L_C$

Nous mesurons la longueur critique de rupture en déterminant la longueur maximale atteinte par la fissure avant la rupture brutale de l'échantillon (voir figure 3.11).

Cette mesure délicate est possible grâce à notre caméra rapide, et notre système d'acquisition. En effet, le déclenchement de la caméra à partir du signal de déformation de l'échantillon nous permet d'obtenir de nombreuses images à l'approche du seuil de rupture. De plus, comme à chaque déclenchement la caméra enregistre 2 images séparées de  $4.10^{-3}\text{s}$ , nous pouvons obtenir une idée de la vitesse instantanée de la fissure. Ainsi, l'examen de ces vitesses, permet de filtrer des images que la caméra aurait enregistrées pendant le régime dynamique i.e au delà de  $L_C$ , et donc d'améliorer la mesure de cette longueur critique  $L_C$ . Il faut noter que cette procédure entraîne une sous-estimation de la longueur critique.

### Contrainte à la pointe de la fissure et seuil critique de rupture

Nous examinons alors la longueur critique de rupture mesurée en fonction de la contrainte appliquée pour l'ensemble des expériences de fluage. Il faut

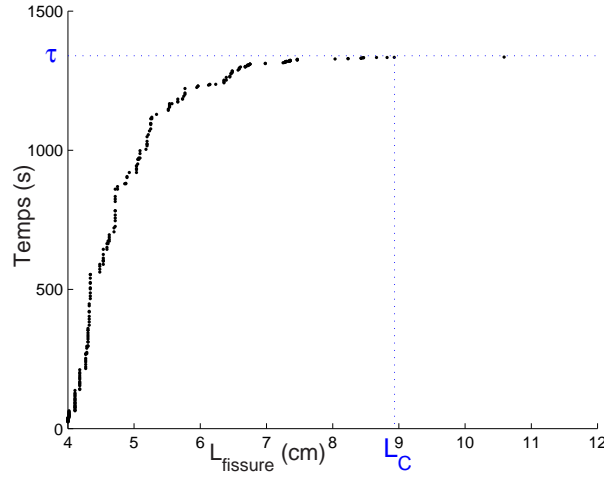


FIG. 3.11 – Courbe de croissance d’une fissure de longueur initiale  $L_i = 4\text{cm}$ . La force appliquée à l’échantillon est  $F = 160\text{N}$ . Mesure du temps de rupture  $\tau = 1340\text{s}$  et de la longueur critique de rupture  $L_C = 8.9\text{cm}$ .

remarquer d’abord que la dispersion sur cette mesure est assez importante de l’ordre de 10% (les barres d’erreur sur la figure 3.12 représente l’erreur statistique).

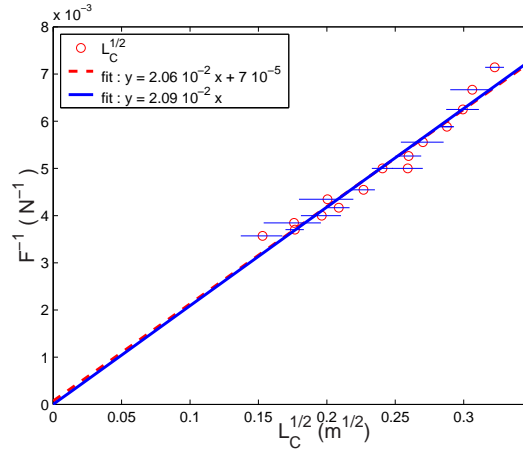


FIG. 3.12 – Inverse de la force appliquée aux échantillons  $F^{-1}$  en fonction de la racine carrée de la longueur critique de rupture moyenne  $\sqrt{L_C}$ . Le fit en trait plein donne une droite d’équation :  $y = 2.06 \cdot 10^{-2}x + 7 \cdot 10^{-5}$ . Le fit en traits pointillés donne une droite d’équation :  $y = 2.09 \cdot 10^{-2}x$ .

L'analyse de la longueur critique de rupture en fonction de la contrainte appliquée va nous permettre de déterminer le seuil de rupture des feuilles de papier. Nous utilisons ici la prédiction établie par Inglis [36] qui détermine la contrainte à la pointe  $\sigma_p$  d'une cavité elliptique de longueur  $\ell$  et de rayon de courbure  $\rho_c$ , dans une plaque soumise à une contrainte constante  $\sigma$  perpendiculairement à la fissure, ie en mode 1 de rupture :  $\sigma_p = \sigma(1 + 2\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}})$ . Le terme en  $\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}}$  montre que la contrainte à la pointe du défaut dépend aussi bien de sa forme, avec le rayon de courbure  $\rho_c$ , que de sa longueur  $\ell$ .

Ainsi, en analysant comme sur la figure 3.12, l'inverse de la force appliquée aux échantillons  $F^{-1}$  en fonction de la racine carrée de la longueur critique de rupture moyenne mesurée  $\sqrt{L_C}$ , nous pouvons déterminer la force critique de rupture  $F_c$  de nos échantillons ainsi que le rayon de courbure  $\rho_c$  tels que :  $\frac{1}{F} = \frac{1}{F_c}(1 + 2\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}})$ .

On observe sur la figure 3.12 un comportement quasi-linéaire du type  $1/F \propto \sqrt{L_c}$ , mettant en évidence que la concentration des contraintes à la pointe du défaut est un effet dominant dans nos expériences. L'ajustement des données montre une ordonnée à l'origine petite  $\beta = 7.2 \cdot 10^{-5} N^{-1}$ , nous permettant d'estimer la force critique de rupture  $F_c = 1/\beta = 13850 N$ , soit une contrainte critique de rupture  $\sigma_c = 1.32 \cdot 10^9 N.m^{-2}$  (valeur  $\sim 3$  fois plus petite que celle du module d'Young). De plus, la pente  $\alpha$  nous donne le rayon de courbure  $\rho_c$  local à la pointe du défaut. Nous supposons que même si notre fissure n'est pas une cavité elliptique, la contrainte à la pointe reste définie par le rayon de courbure local en tête de la fissure. Nous obtenons alors  $\rho_c = (\frac{2}{F_c \alpha})^2 = 32 \mu m$ . Cette valeur nous paraît raisonnable car du même ordre de grandeur que la taille des fibres  $d_f \simeq 20 \mu m$ . Ainsi, si nous considérons durant nos expériences, la fissure avec un rayon de courbure à la pointe fixé  $\rho_c = 32 \mu m$ , et connaissant la contrainte critique de rupture, nous pouvons estimer la contrainte à la pointe de la fissure :  $\sigma_p = \sigma(1 + 2\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}}) \simeq 2\sigma\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}}$ . (Dans nos expériences  $\ell$  varie typiquement de 1 à 12 cm, soit  $2\sqrt{\frac{\ell}{\rho_c}} \geq 35 \gg 1$ ).

### Contrainte à la pointe de la fissure $\sigma_p$ et facteur d'intensité des contraintes $K$

La théorie élastique linéaire des milieux continus [11, 12, 14, 15, 17] déterminant les champs de contraintes et de déplacements dans le voisinage d'un défaut infiniment plat (soit un rayon de courbure  $\rho_c \rightarrow 0$ ) prédit une divergence de la contrainte  $\sigma$  proche de la pointe de ce défaut :  $\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$  avec  $r$  distance à la pointe du défaut, et  $K$  un coefficient nommé facteur d'intensité des contraintes. Ce facteur d'intensité des contraintes dépend aussi bien

de la contrainte appliquée, la géométrie de l'échantillon et de la longueur du défaut  $L : K = \sigma \sqrt{L\psi(\frac{H}{L})}$ , où nous prenons en compte une correction de taille finie  $\psi(\frac{H}{L})$  (voir [11, 12]).

La structure fibreuse de nos échantillons de papier introduit naturellement une longueur de coupure, correspondant à la taille des fibres,  $d_f$  échelle discrète mésoscopique. Le lien avec l'analyse précédente conduit à considérer que la contrainte à la pointe de la fissure  $\sigma_p$  peut être estimée en prenant comme distance à la pointe du défaut la taille d'une fibre  $\simeq d_f : \sigma_p = \frac{K}{\sqrt{2\pi d_f}}$ .

Il est important de remarquer qu'on retrouve de manière cohérente le même type de formule en déterminant la contrainte moyenne supportée par la fibre à la pointe du défaut.

Dans la suite de notre exposé, nous utiliserons le facteur d'intensité des contraintes  $K$  pour estimer la contrainte locale à la pointe de la fissure. (Ce paramètre est largement utilisé dans la communauté des mécaniciens de la fracture, car il permet également de mesurer le taux d'énergie libérée lors de l'avancement de la fissure).

### Seuil de rupture $K_C$

La ténacité ou le seuil de rupture de nos échantillons correspond au facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$  défini comme  $K_C = \sigma \sqrt{L_C\psi(\frac{H}{L_C})}$ . Le facteur de correction géométrique s'écrit :  $\psi(\frac{H}{L}) = \frac{H}{L} \tan(\frac{\pi}{2} \frac{L}{H})$  où  $H$  correspond à la hauteur de la feuille et  $L$  la longueur de la fissure ([11, 12]). On peut remarquer que lorsque la hauteur de l'échantillon est très grande devant la longueur de la fissure,  $H \gg L$ , le facteur de correction géométrique tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . De plus, cette correction de taille finie apparaît très importante, de l'ordre de 25% pour les plus grandes longueurs de fente mesurées ( $L_f \sim 10cm$ ). Nous pouvons inclure cette correction géométrique dans la longueur critique, en définissant une longueur critique corrigée telle que  $L_C^{corr} = L_C\psi(\frac{H}{L_C})$ .

Sur la figure 3.13, nous réexaminons la longueur critique moyenne en fonction de la contrainte appliquée, en tenant compte cette fois-ci des effets de taille finie (contrairement à la figure 3.12). La courbe sur la figure 3.13 montre un comportement linéaire de la longueur critique de rupture corrigée  $L_C^{corr}$  en fonction de l'inverse du carré de la contrainte appliquée  $\sigma^{-2}$ . Ce comportement linéaire correspond à la prédiction établie par Griffith [37], qui propose une longueur critique de rupture  $L_G$  telle que  $L_G = \frac{4\gamma Y}{\pi\sigma^2}$ , où  $Y$  est le module d'Young, et  $\gamma$  l'énergie de surface de l'échantillon soumis à la contrainte  $\sigma$ . Nous allons comparer les longueurs critiques mesurées au cours de nos expériences de fluage à la prédiction établie par Griffith, au

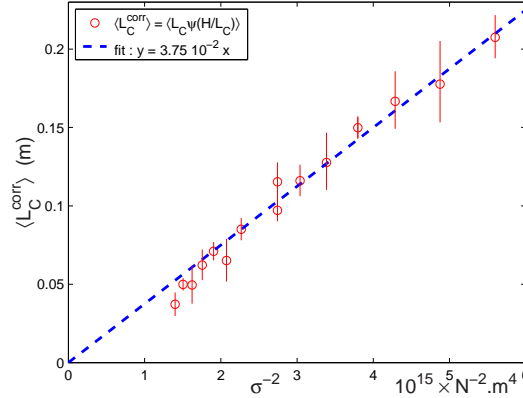


FIG. 3.13 – Longueur critique de rupture corrigée  $\langle L_C^{corr} \rangle$  par les effets de taille finie, moyennées pour un ensemble d'expériences de fluage réalisées à paramètres expérimentaux fixés (force appliquée  $F$  et longueur de fente initiale  $L_i$ ), en fonction de l'inverse du carré de la contrainte appliquée  $\sigma$ . Le fit linéaire (en trait plein bleu) donne une droite :  $y = 3.75 \cdot 10^{-2} x$

paragraphe suivant.

De plus, la pente de la droite obtenue à partir du fit linéaire des longueurs critiques moyennées (sur un ensemble d'expériences réalisées dans les mêmes conditions), nous permet de déterminer le seuil de rupture des feuilles de papier correspondant au facteur d'intensité de contraintes critique  $K_C$  tel que  $L_C^{corr} = L_C \psi(\frac{H}{L_C}) = \frac{K_C}{\sigma^2}$ . On obtient alors  $K_C = (6.1 \pm 0.3) 10^6 N m^{-\frac{3}{2}}$ . Nous montrerons que cette estimation du seuil de rupture de nos échantillons de papier est en bon accord avec une valeur établie à partir de l'examen des tailles de sauts durant le processus de rupture.

#### Remarques :

On observe sur la figure 3.13 que la valeur moyenne des plus petites longueurs critiques mesurées correspondant aux expériences de traction à  $L_i = 1cm$ , (en prenant compte de la correction de taille finie)  $\langle L_C^{corr} \rangle$  semble systématiquement en dessous de la droite représentant l'ajustement linéaire. Ces valeurs correspondent aux premières expériences que nous avons réalisé. La méthode de suivi de la fissure et par conséquent, la mesure de la longueur critique n'était alors pas encore optimale, pouvant conduire ainsi à une sous-estimation de la longueur critique de rupture.

### 3.2.2 Comparaison Longueur de Griffith $L_G$ / Longueur critique de rupture $L_C$

Nous avons observé précédemment sur la figure 3.13 que la longueur critique de rupture  $L_C$  est inversement proportionnelle au carré de la contrainte appliquée  $\sigma$ . Or Griffith prédit une longueur critique de rupture [37], telle que  $L_G = \frac{4\gamma Y}{\pi\sigma^2}$ , où  $\gamma$  représente l'énergie de surface et  $Y$  le module d'Young de l'échantillon. Pour comparer cette prédiction à nos mesures de longueurs critiques, nous allons déterminer dans nos expériences de fluage la longueur critique de Griffith  $L_G$ . La difficulté réside en la mesure de l'énergie de surface  $\gamma$ .

#### Mesure de l'énergie de surface $\gamma$

Nous allons utiliser la mesure du travail  $W$  fourni par la machine de traction durant une expérience de fluage, pour déterminer l'énergie nécessaire pour ouvrir la fissure. Considérons le système représenté sur la figure 3.14 : une plaque élastique d'épaisseur  $e$ , comportant une fissure de longueur  $l$ , et soumise à une charge constante  $F$ .

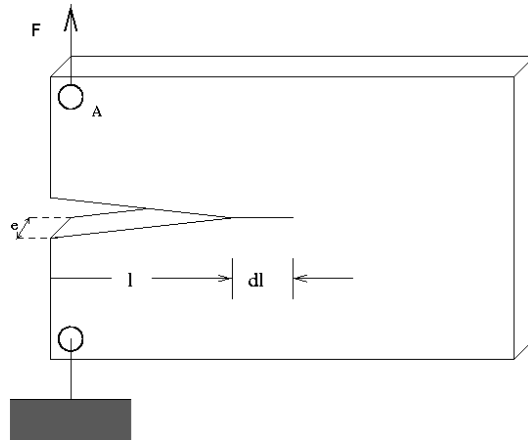


FIG. 3.14 – Plaque élastique d'épaisseur  $e$  comportant une fissure de longueur  $l$  soumise à une charge constante  $F$ , avec un déplacement  $x$  du point de chargement  $A$ .

L'énergie potentielle  $U$  de cette plaque est la somme d'un terme d'énergie mécanique  $U_M$  et d'un terme d'énergie libre de création de surface  $U_S$  :  $U = U_M + U_S$ . Cette énergie mécanique est elle-même la somme de l'énergie potentielle de déformation emmagasinée dans la plaque élastique  $U_E$  et de

l'énergie potentielle du système de chargement extérieur  $U_A$ , correspondant à l'opposé du travail  $W$  fourni par la machine de traction en déplaçant le point de chargement  $A$  :  $U_M = U_E + U_A = U_E - W$ . Or, la théorie élastique linéaire montre que le travail fourni par la machine de traction est égale à 2 fois l'énergie potentielle de déformation élastique, soit  $W = 2U_E$ , de sorte que l'énergie mécanique  $U_M$  peut s'écrire  $U_M = -U_E = -\frac{1}{2}W$ . On obtient alors pour l'énergie potentielle de la plaque :

$$U = U_M + U_S = -\frac{1}{2}W + U_S$$

Nous pouvons écrire la variation d'énergie potentielle  $dU = -\frac{1}{2}\delta W + dU_S$ . Le premier terme favorise l'extension de la fracture alors que le second s'oppose à la création de nouvelles surfaces fracturées. Aussi, la machine de traction fournissant le travail  $\delta W$  en effectuant un déplacement  $dx$  à charge constante  $F$  va permettre un avancement  $dl$  de la fissure, à condition que  $dU \leq 0$  soit  $\delta W \geq 2dU_S$ . (Critère établi par Griffith [37])

- La machine de traction fournit le travail  $\delta W = Fdx$  en effectuant un déplacement  $dx$  à charge constante  $F$ .
- L'énergie libre de création de surface  $U_S$  s'écrit  $U_S = 2\gamma el$ , soit  $dU_S = 2\gamma edl$ .

Le travail minimum que doit fournir la machine de traction,  $\delta W_{min}$  pour permettre l'avancement de la fissure s'écrit donc,  $\delta W_{min} = 2dU_S = 4\gamma edl$ , ce qui revient à estimer une borne supérieure pour l'énergie de surface  $\gamma_{max}$  :

$$\begin{aligned} \delta W &\geq \delta W_{min} = 2dU_S \\ \text{soit} \quad \gamma &\leq \gamma_{max} = \frac{F}{4e} \frac{dx}{dl} \end{aligned}$$

où on rappelle que  $e$  est l'épaisseur de la plaque élastique soumise à une charge constante  $F$ , la fissure réalisant un pas infinitésimal  $dl$ , pour un déplacement  $dx$  de la machine de traction. Dans la suite pour alléger les notations, on considèrera cette borne supérieure  $\gamma_{max} = \frac{F}{4e} \frac{dx}{dl}$  comme étant l'énergie de surface  $\gamma$ . Cette expression relie donc le travail fourni par la machine de traction, à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces fracturées.

Or, on a pu remarquer précédemment qu'un échantillon soumis à une force constante, se déforme lentement. Ce phénomène dit de fluage traduit la déformation lente et volumique de l'échantillon, qui n'est effectivement pas localisée autour de la fissure ni corrélée à l'avancement de celle-ci, comme en témoignaient les figures 3.3.

Nous rappelons sur les figures suivantes 3.15 cette déformation lente d'un échantillon de papier lors d'une expérience de fluage à  $F = 190N$ , et  $L_i = 3cm$ , et l'évolution temporelle du défaut initial.

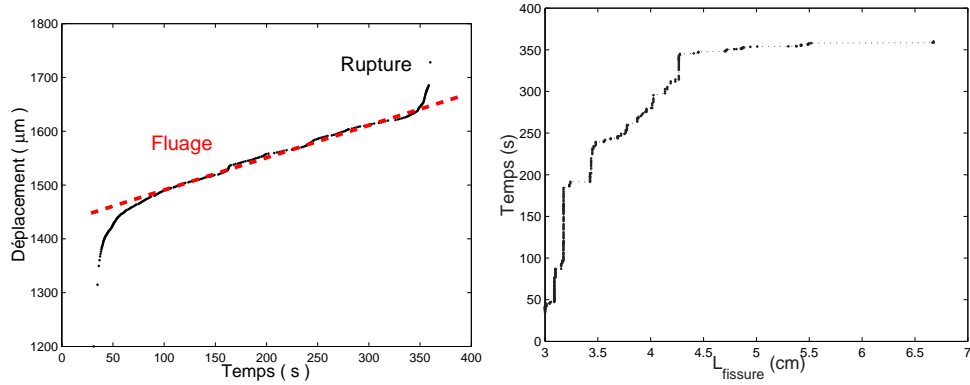


FIG. 3.15 – A gauche : Allongement d'un échantillon de papier comportant un défaut initial de longueur  $L_i = 3\text{cm}$ , soumis à une force constante  $F = 190\text{N}$ . A droite : Croissance de la fissure durant cette expérience de traction.

La figure 3.16 représentant l'allongement de l'échantillon en fonction de la longueur de la fissure, va nous permettre d'estimer le rapport  $\frac{dx}{dl}$  et par conséquent l'énergie de surface  $\gamma$ .

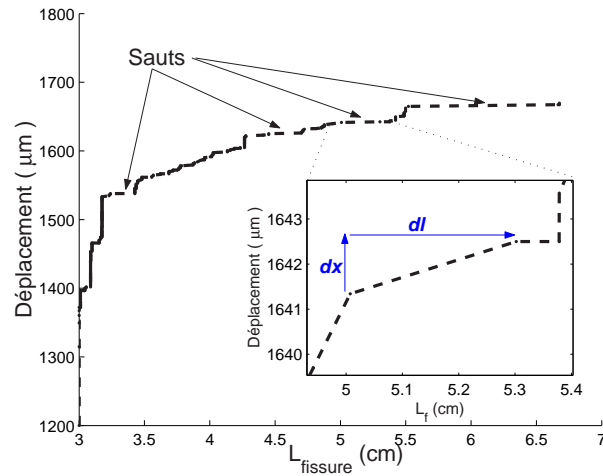


FIG. 3.16 – Allongement de l'échantillon en fonction de la longueur de fissure, durant une expérience de fluage à  $F = 190\text{N}$  et  $L_i = 3\text{cm}$ .

Cependant, le travail fourni par la machine de traction ne sert donc pas uniquement à ouvrir la fissure mais provoque également la déformation volumique de l'échantillon. Ainsi, en prenant sur la figure 3.16 un allongement  $dx$  correspondant à un avancement de la fissure  $dl$  quelconque, nous allons sur-estimer l'énergie de surface  $\gamma$ .



Nous remarquons que la fissure avance par sauts à des échelles de temps rapide, alors que la déformation volumique s'opère très lentement. Cela va nous permettre de découpler le phénomène de fluage et l'avancement de la fissure. Ainsi, nous allons examiner le déplacement de la machine de traction à de échelles temporelles rapides, lorsque la fissure effectue un saut. Cette analyse nous permet donc de minimiser l'effet du fluage et nous pouvons alors obtenir une borne supérieure pour l'énergie de surface  $\gamma$  et par conséquent pour la longueur de Griffith  $L_G$ .

Nous pouvons répéter cette analyse pour les divers sauts détectés durant l'évolution temporelle du défaut, et enfin pour les diverses expériences de fluage réalisées. On obtient donc pour diverses courbes de croissance obtenues lors d'expériences de fluage à  $L_i = 1\text{cm}$  et  $L_i = 3\text{cm}$ , l'énergie de surface moyenne  $\langle\gamma\rangle = 1540 \pm 180\text{N.m}^{-1}$  (avec un écart-type  $\langle\gamma^2\rangle^{1/2} = 850\text{N.m}^{-1}$ ). On remarque que la dispersion sur cette mesure est très importante. Cette énergie de surface moyenne  $\langle\gamma\rangle$  nous permet alors d'estimer la longueur critique de Griffith moyenne  $\langle L_G \rangle = \frac{4\langle\gamma\rangle Y}{\pi\sigma^2}$ , avec le module d'Young  $Y = 3.3 \cdot 10^9\text{N.m}^{-2}$ .

La figure 3.17 représente la longueur critique moyenne  $\langle L_C \rangle$ , que nous avons mesurées pour l'ensemble des expériences de fluage, en fonction de la longueur de Griffith  $\langle L_G \rangle$  estimée à partir de la mesure de l'énergie de surface moyenne  $\langle\gamma\rangle$ .

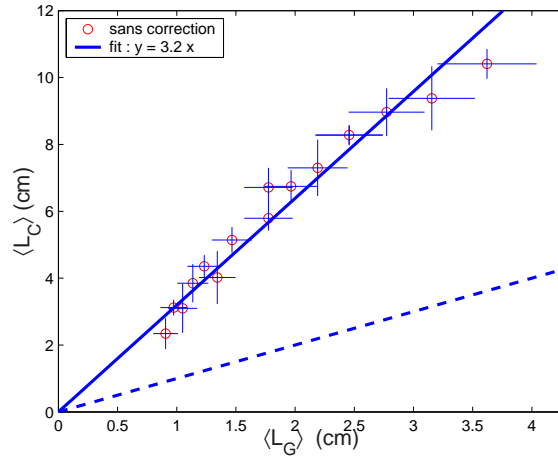


FIG. 3.17 – Longueur critique de rupture moyenne  $\langle L_C \rangle$ , en fonction de la longueur critique de Griffith moyenne  $\langle L_G \rangle$ . La droite en trait plein représente le meilleur fit linéaire :  $\langle L_C \rangle = 3.2\langle L_G \rangle$ . A titre indicatif, nous avons tracé en pointillés la droite  $\langle L_C \rangle = \langle L_G \rangle$ .

Nous remarquons donc qu'en moyenne la longueur critique de rupture croît linéairement avec la longueur critique de Griffith. Cette dépendance linéaire avait déjà été mise en évidence sur la figure 3.13, lorsque nous analysons la longueur critique  $L_C$  en fonction de l'inverse du carré de la contrainte appliquée  $\sigma$ . De plus, nous pouvons encore remarquer l'importance des effets de taille finie, en observant sur la figure 3.18 que ce comportement linéaire est bien meilleur lorsqu'on prend en compte dans la mesure des différentes longueurs  $L$  les effets de taille finie [11] avec un facteur de correction géométrique<sup>1</sup>  $\psi_r(H/L)$  tel que  $L^{corr} = L\psi_r(H/L)$ , où  $H$  est la hauteur de l'échantillon.

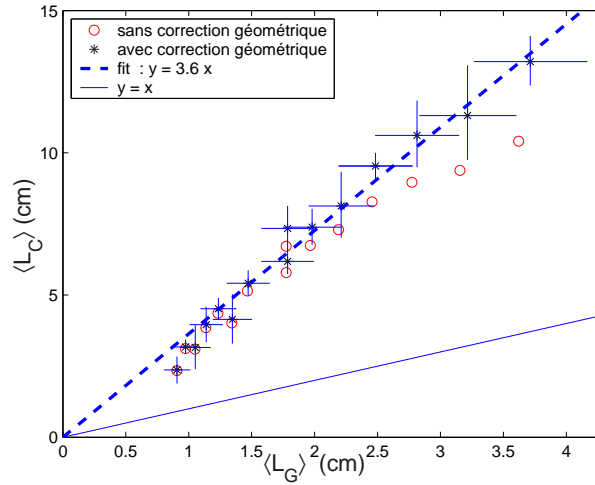


FIG. 3.18 – Longueur critique de rupture moyenne, corrigée par les effets de taille finie,  $\langle L_C^{corr} \rangle$ , en fonction de la longueur critique de Griffith moyenne, corrigée également par des effets de taille finie  $\langle L_G^{corr} \rangle$ . La droite en traits pointillés représente le meilleur fit linéaire :  $y = 3.6x$ . A titre indicatif, nous avons représenté la longueur critique moyenne en fonction de la longueur de Griffith moyenne sans tenir compte des corrections géométriques. La courbe en trait plein représente la droite  $\langle L_C^{corr} \rangle = L_G^{corr}$ .

Cette analyse met donc en évidence que la longueur critique de rupture  $L_C$  correspondant à la longueur de la fissure juste avant la rupture brutale de l'échantillon, apparaît au moins 2 fois plus grandes (en prenant compte les barres d'erreurs) que la longueur critique de Griffith  $L_G$ . De plus, il faut rappeler que la longueur de Griffith  $L_G$  que nous estimons apparaît en fait

<sup>1</sup>La correction géométrique  $\psi_r = \frac{2}{\pi}\psi$  de sorte que  $\psi_r \rightarrow 1$  lorsque la hauteur de l'échantillon est grande devant la longueur de la fissure  $L$ .

comme une borne supérieure de la longueur dite de Griffith. En effet, d'une part, les effets dissipatifs de déformation lente et volumique entraînent une sur-estimation de l'énergie de surface  $\gamma$  et donc de la longueur de Griffith. D'autre part, l'énergie de surface  $\gamma$  que nous estimons est elle même par définition une borne supérieure de l'énergie de surface de nos échantillons.

Nous pouvons donc affirmer que nous distinguons expérimentalement la longueur critique de Griffith, de la longueur critique de rupture juste avant la rupture complète du matériau. Nous décrirons au chapitre suivant un modèle numérique de réseau de ressorts qui prédit une longueur critique de rupture plus grande que la longueur de Griffith.

Nous pouvons remarquer également sur la figure 3.19 que la longueur de Griffith  $L_G$  apparaît inférieure ou égale à la longueur de fente initiale  $L_i$ .

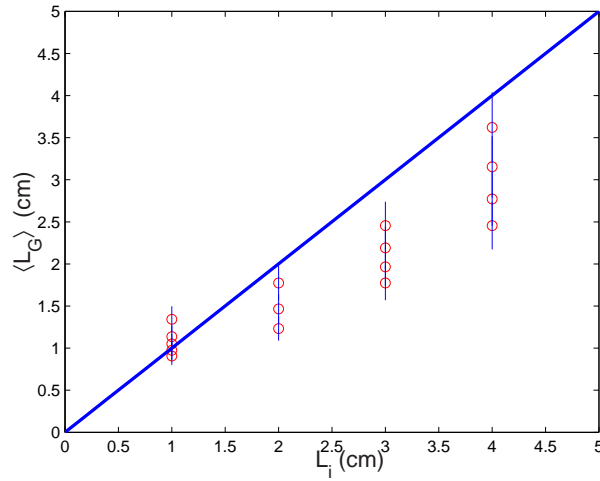


FIG. 3.19 – Longueur critique de Griffith moyenne  $\langle L_G \rangle$ , en fonction de la longueur de fente initiale  $L_i$  pour l'ensemble des expériences de fluage réalisées. A titre indicatif, nous avons tracé la droite  $\langle L_G \rangle = L_i$ .

Nous allons maintenant nous intéresser à l'autre longueur caractéristique de la dynamique moyenne de rupture :  $\zeta$ .

### 3.2.3 Longueur de croissance caractéristique $\zeta$

Nous analysons ici les valeurs de  $\zeta$  obtenues, en les comparant à d'autres longueurs caractéristiques de notre système. Comme nous l'avons remarqué précédemment, les courbes de croissance présentent une forte dispersion, la distribution des temps de vie étant très large. Nous effectuons alors une moyenne des courbes de croissance sur un nombre de 5 à 20 réalisations. Les

valeurs de la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  déterminées à partir du fit exponentiel des courbes de croissance moyennées peuvent être entachées d'une erreur très importante, due au manque de statistique. Cependant, nous pouvons malgré le manque de statistique, mettre en évidence la dépendance de  $\zeta$  en fonction notamment d'autres longueurs mises en jeu dans notre système ou de la contrainte appliquée aux échantillons.

Ainsi, nous remarquons sur la figure 3.20 que cette longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  a tendance à croître avec la longueur de fissure initiale  $L_i$ .

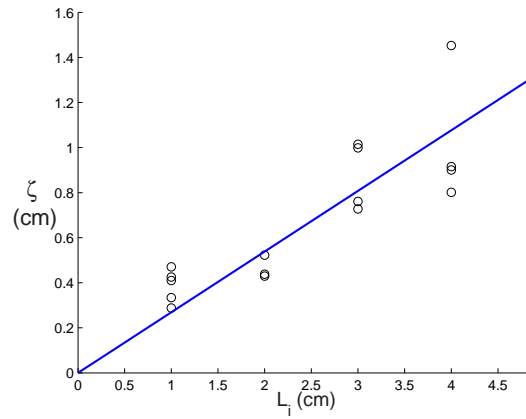


FIG. 3.20 – Longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  en fonction de la longueur de fissure initiale  $L_i$ . (A titre indicatif, la droite en trait plein représente le meilleur fit linéaire,  $y = 0.27x$ ).

Cependant, il reste une dépendance de  $\zeta$  avec la force appliquée pour une longueur de fente initiale fixée. Nous allons donc examiner cette longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  en fonction d'autres paramètres de notre système. Aussi, on peut remarquer sur la figure 3.21 que la longueur de croissance caractéristique croît avec la longueur de fissure critique moyenne  $L_C$ .

Cette dépendance linéaire de  $\zeta$  avec la longueur critique de rupture  $L_C$  révèle en fait la dépendance quadratique de cette longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  avec la contrainte appliquée à l'échantillon  $\sigma$ . En effet, on a pu remarquer précédemment que  $L_C \sim \frac{K_C^2}{\sigma^2}$ , où  $K_C$  est une constante correspondant au seuil de rupture.

Nous examinons alors sur la figure 3.22 la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  en fonction de la contrainte appliquée.

Ces figures 3.22 montrent que la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  croît de façon non-linéaire, quadratique, avec l'inverse de la contrainte appliquée  $\sigma$  (sur la figure de droite, le fit linéaire passe bien par zéro). Au

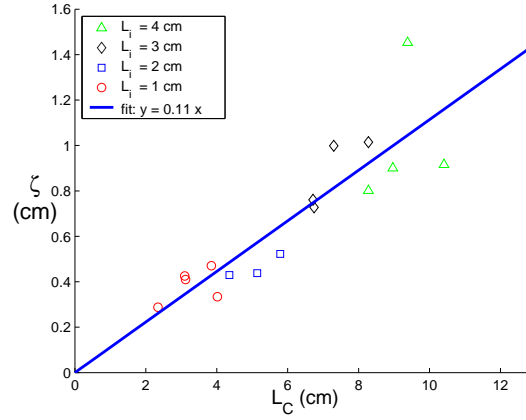


FIG. 3.21 – Longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  en fonction de la longueur de fissure critique moyenne  $L_c$ . Les différents symboles et couleurs correspondent à des expériences réalisées pour différentes longueurs de fente initiale. A titre indicatif, la droite (en trait plein) représente le meilleur fit linéaire,  $y = 0.11x$

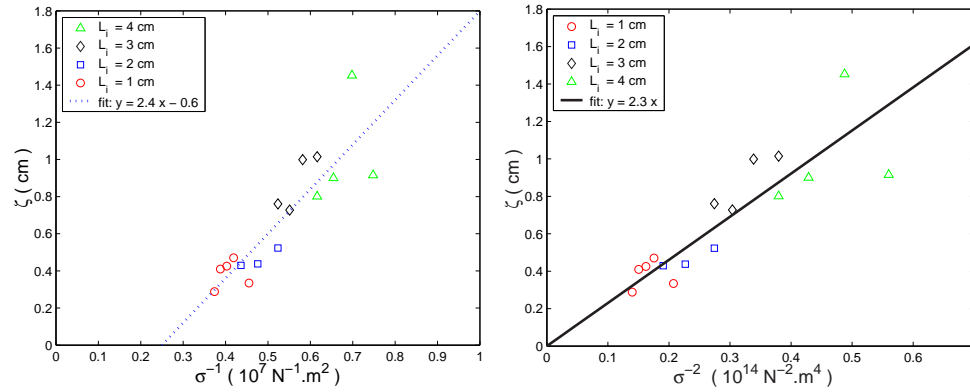


FIG. 3.22 – A gauche : Longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  en fonction de l'inverse de la contrainte appliquée  $\sigma^{-1}$ . A titre indicatif, la droite (en traits pointillés bleu) représente le meilleur fit,  $y = 2.4x - 0.6$  A droite : Longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  en fonction de l'inverse du carré de la contrainte appliquée  $\sigma^{-2}$ . A titre indicatif, la droite (en trait plein) représente le meilleur fit linéaire,  $y = 2.3x$

chapitre suivant, nous proposerons justement un modèle de croissance lente qui prédit notamment une dépendance de cette longueur caractéristique  $\zeta$  avec la longueur de fente initiale  $L_i$  et prévoit que  $\zeta$  augmente avec l'inverse du carré de la contrainte appliquée aux bords de l'échantillon  $\sigma$ .

### 3.2.4 Temps de rupture $\tau$

Nous allons maintenant examiner le dernier paramètre caractérisant la dynamique moyenne de rupture de nos échantillons de papier : les temps de rupture  $\tau$ .

Dans un premier temps, nous présentons les résultats d'expériences qui montrent le rôle important de la température dans ce processus d'endommagement sous-critique.

#### Rôle de la température

Cette étude a été menée au laboratoire GEMPPM de l'INSA de Lyon, qui nous a permis d'étudier expérimentalement le rôle de la température dans le processus de fracturation lente, en mettant à notre disposition leur matériel très performant. Ainsi, nous avons pu réaliser quelques expériences de fluage à haute température jusqu'à des températures de l'ordre de  $120^\circ\text{C}$ , en utilisant une machine de traction placée dans une enceinte régulée en température.

Il faut remarquer que pour ces expériences, nous n'avons pas pu suivre la même procédure que pour les autres expériences de fluage, réalisées dans notre laboratoire. D'une part, nous ne pouvons pas contrôler le taux d'humidité  $h$ , durant l'expérience. Aussi, pour ces expériences, les échantillons de papier utilisés sont tous issus d'un même rouleau qui était en contact avec l'atmosphère ambiante. Enfin, la fente initiale est réalisée au préalable, grâce à une lame de rasoir. Pour chacune de ces expériences, la longueur de fente initiale était fixée à  $L_i = 2\text{cm}$ . Le taux d'humidité  $h$  ambiant était de l'ordre de  $h \sim 24\%$ , avec une température  $T \sim 22^\circ\text{C}$ .

Bien que nous ayons réalisé peu d'expériences (nous n'avons qu'une seule réalisation à conditions expérimentales, température  $T$  et force appliquée  $F$  fixées), nous pouvons mettre en évidence la dépendance du temps de rupture  $\tau$  en fonction de la température  $T$ .

En effet, sur la figure 3.23, nous révélons l'effet dramatique de la température  $T$  sur le temps de vie de nos échantillons  $\tau$  en examinant par exemple, les expériences de fluage réalisées à  $F = 190\text{N}$  : à température ambiante  $T \sim 22^\circ\text{C}$  (soit  $T \sim 295\text{K}$ ), le temps de vie de la feuille de papier sous tension est de plus de 20 heures, alors qu'à une température de  $T \sim 80^\circ\text{C}$  (soit  $\sim 353\text{K}$ ), l'échantillon casse en moins d'1 minute ! De plus, nous pouvons remarquer que lorsque nous travaillons à haute température, le taux d'humidité diminue. Or, nous avons pu observer au chapitre précédent, que lorsque le taux d'humidité diminue, la force critique de rupture augmente, et par conséquent le temps de vie de l'échantillon devrait également augmenter. L'augmentation de la température et la diminution du taux d'humidité ont

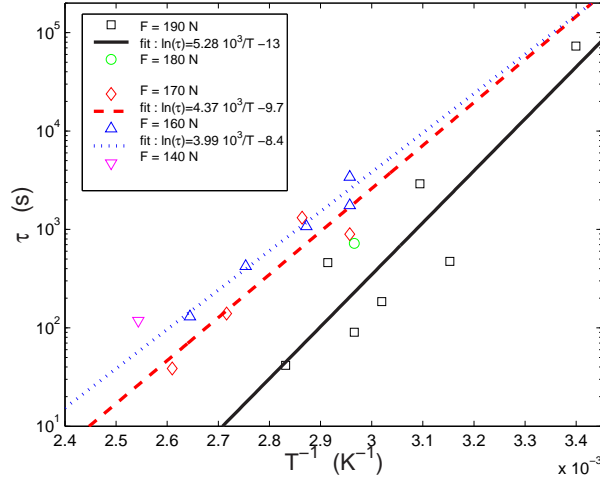


FIG. 3.23 – Temps de vie  $\tau$  des échantillons de papier en fonction de la température  $T$ . Les différents symboles et couleurs correspondent aux différentes forces appliquées  $F$  aux échantillons. Les droites représentent des fits du type  $\ln(\tau) = \frac{\alpha}{T} + \beta$ .

donc des effets contraires. L'observation de temps de rupture courts à haute température et donc faible taux d'humidité, met en évidence un effet de la température sur le temps de rupture de nos échantillons de papier d'autant plus spectaculaire.

De plus, la figure 3.23 montre que le temps de rupture des échantillons soumis à une force appliquée donnée  $F$  décroît à peu près exponentiellement avec la température  $T$ . Ce résultat est en accord avec des expériences antérieures [38, 39] où le temps de rupture  $\tau$  suit une loi d'Arrhenius  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$ .

A température imposée, on peut observer un décalage systématique des temps de rupture  $\tau$  pour les différentes forces  $F$  appliquées aux échantillons. Ceci est en accord avec les résultats de Zhurkov [39], qui propose pour les temps de rupture une loi d'Arrhenius, avec une barrière d'énergie  $\Delta U$  décroissant avec la contrainte.

On a tracé sur la figure 3.23 un ajustement des données du type  $\ln(\tau) = \frac{\alpha}{T} + \beta$  pour les différentes forces appliquées aux échantillons  $F$ . On peut remarquer alors que ce paramètre  $\alpha$  dépend de la force appliquée  $F$ . Nous examinons alors sur les figures 3.24, le paramètre d'ajustement  $\alpha$  en fonction de la force appliquée aux échantillons  $F$ .

Nous n'avons que 3 différents paramètres  $\alpha$  qui correspondent à des expériences réalisées à des forces guères éloignées. Aussi, la dépendance de ce paramètre  $\alpha$  avec la force appliquée aux échantillons est difficile à extraire. Cependant, les figures 3.24 semblent montrer que la paramètre  $\alpha$  croît ap-

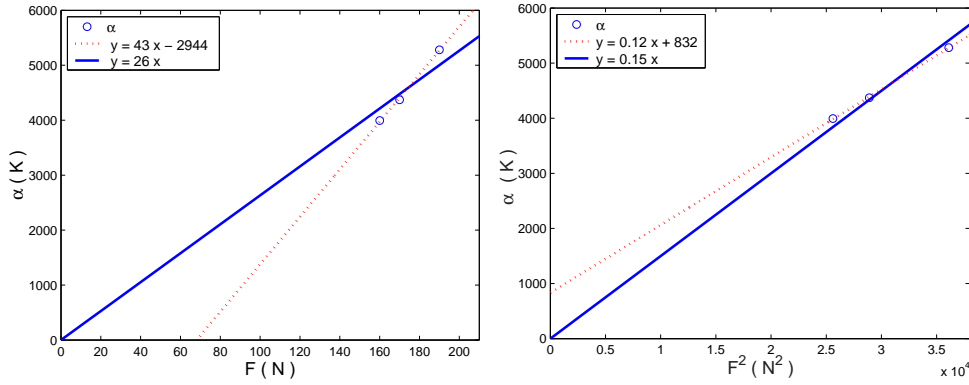


FIG. 3.24 – A gauche : paramètre  $\alpha$  issu de l'ajustement des données de temps de rupture  $\tau$  en fonction de la température  $T$ , en fonction de la force appliquée  $F$ . A titre indicatif, la droite en traits pointillés représente le meilleur fit,  $y = 43x - 2944$  et la droite représente le meilleur fit linéaire  $y = 26x$ . A droite : paramètre  $\alpha$  issu de l'ajustement des données de temps de rupture  $\tau$  en fonction de la température  $T$ , en fonction du carré de la force appliquée  $F^2$ . A titre indicatif, la droite en traits pointillés représente le meilleur fit,  $y = 0.12x + 832$  et la droite représente le meilleur fit linéaire  $y = 0.15x$ .

proximativement de manière quadratique avec la force  $F$ . On remarque aussi que ce paramètre  $\alpha$  vaut environ 10 fois la température. Nous sommes alors tentés d'examiner les temps de rupture  $\tau$  en fonction du rapport  $\frac{F^2}{T}$ . Cette analyse peut être également justifiée par des arguments de type dimensionnels : nous allons comparer un terme d'énergie élastique, qui se comporte en  $\frac{\sigma^2}{Y}$  où  $\sigma$  est la contrainte appliquée et  $Y$  le module d'Young, avec l'énergie  $k_B T$  (nous négligeons ici la dépendance du module d'Young avec la température  $T$ ).

Nous examinons alors les temps de rupture en fonction de  $\frac{F^2}{T}$  rapport du carré de la force appliquée  $F$  et de la température  $T$ .

Nous observons sur la figure 3.25 que le temps de rupture  $\tau$  augmente exponentiellement avec le rapport  $\frac{F^2}{T}$ . Lorsque nous effectuons un ajustement du type  $\ln(\tau) = \alpha_1 \frac{F^2}{T} + \beta_1$ , les valeurs obtenues pour le paramètre libre  $\alpha_1$  varie peu. Aussi, nous avons tracé sur la figure 3.25 comme guide pour les yeux, les droites  $\ln(\tau) = 0.15 \frac{F^2}{T} + \beta_1$ . Cependant, nous remarquons encore un décalage systématique pour les différentes forces appliquées  $F$ . En considérant que le temps de rupture suit une loi d'Arrhénius  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$ , nous mettons en évidence que la barrière d'énergie  $\Delta U$  ne dépend pas uniquement de la force appliquée aux échantillons.



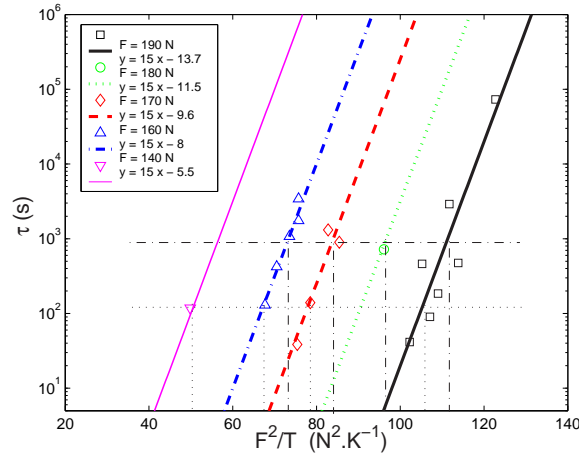


FIG. 3.25 – Temps de vie  $\tau$  en fonction de  $\frac{F^2}{T}$ , rapport du carré de la force appliquée  $F^2$  et de la température  $T$ . A titre indicatif, nous traçons les droites de type  $\ln(\tau) = 0.15 \frac{F^2}{T} + \beta_1$  (nous avons remarqué en réalisant des ajustements en laissant la pente comme paramètre libre que ce paramètre varie peu).

#### Commentaires

La dépendance en  $F^2$  de la barrière d'énergie  $\Delta U$  peut sembler paradoxale, puisque cela semble dire que plus la force appliquée  $F$  est grande, plus le temps de vie de l'échantillon est long. Nous pouvons donc nous attendre à ce que cette expression de la barrière d'énergie  $\Delta U$  soit incomplète.

Comme les échantillons au cours de ces expériences ont tous un même défaut de longueur initiale  $L_i = 2\text{cm}$ , l'effet de décalage observé ne peut être dû au paramètre  $L_i$ . En revanche, nous avons pu remarquer précédemment, que la longueur critique de rupture  $L_C$  n'est pas constante et croît de manière quadratique avec l'inverse de la force appliquée aux échantillons. Nous allons donc examiner la dépendance de cette barrière d'énergie  $\Delta U$  avec cette longueur caractéristique de notre système, la longueur critique  $L_C$  de rupture. Cette longueur critique de rupture peut être estimée à partir du seuil de rupture  $K_C$  de nos échantillons de papier, en supposant que le seuil de rupture correspondant au facteur d'intensité des contraintes critiques  $K_C$  ne dépend pas de la température  $T$  :  $L_C = \frac{K_C^2}{\sigma^2 \pi/2}$  ; (on sur-estime légèrement la longueur critique  $L_C$ , en considérant que les corrections géométriques sont négligeables  $\psi = \pi/2$ , soit  $H \gg L_C$ ).

Afin de déterminer la dépendance de la barrière d'énergie  $\Delta U$  en fonction de la longueur critique  $L_C$ , nous relevons sur la figure 3.25, les valeurs des

différentes abscisses  $X$  correspondant à un même temps de rupture  $\tau$ , soit  $\tau \sim 100s$  et  $\tau \sim 1000s$  (nous effectuons notamment pour le cas  $F = 190N$ , une extrapolation raisonnable à partir de la droite  $\ln(\tau) = 0.15 \frac{F^2}{T} + \beta_1(F)$ ). Nous pouvons alors examiner les différentes abscisses  $X$  mesurées en fonction de la longueur critique de rupture  $L_C$ .

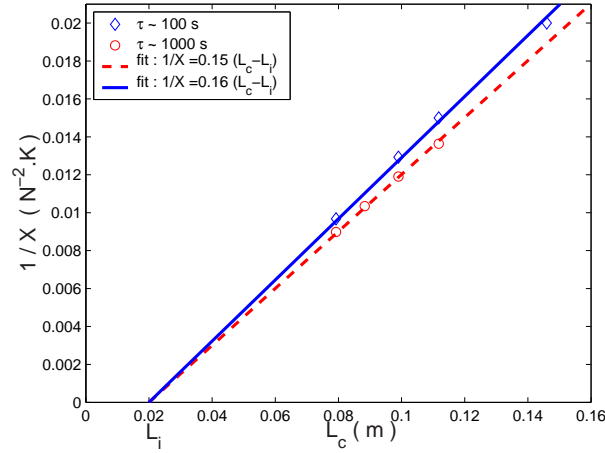


FIG. 3.26 – Inverse des abscisses  $X^{-1}$ , correspondant aux 2 temps de rupture  $\tau \sim 100s$  et  $\tau \sim 1000s$  relevées sur la figure 3.25, en fonction de la longueur critique  $L_C$ . Les droites en traits plein et pointillés représentent les fits :  $X^{-1} = \alpha_2(L_C - L_i)$ , avec  $L_i = 2cm$ .

La figure 3.26 montre que l'inverse des abscisses  $X^{-1}$  croît linéairement avec  $(L_C - L_i)$  différence entre la longueur critique de rupture  $L_C$  et longueur de fente initiale  $L_i$ . Le fait que  $L_i$  apparaisse ici est crucial. En effet, c'est ce terme qui entraîne la décroissance de la barrière lorsque  $F$  augmente, permettant de lever le paradoxe signalé ci-dessus.

Nous sommes alors capable de proposer une barrière d'énergie

$$\Delta U(F, L_C, L_i) \propto \frac{F^2(L_C - L_i)}{k_B T} \propto \frac{K_C^2 - K_i^2}{k_B T}$$

permettant la remise à l'échelle de nos temps de rupture, avec  $K_C$  facteur d'intensité des contraintes critique correspondant au seuil de rupture, et  $K_i$  facteur d'intensité des contraintes initial.

Il est important de remarquer que la forme de cette barrière d'énergie  $\Delta U(F, L_C, L_i)$  est différente de celle proposée par Zhurkov [39], mais également de celle obtenue à partir du concept énergétique de Griffith (voir chapitre introductif 1 paragraphe 1.2.2). Ces prédictions ne prenant pas en

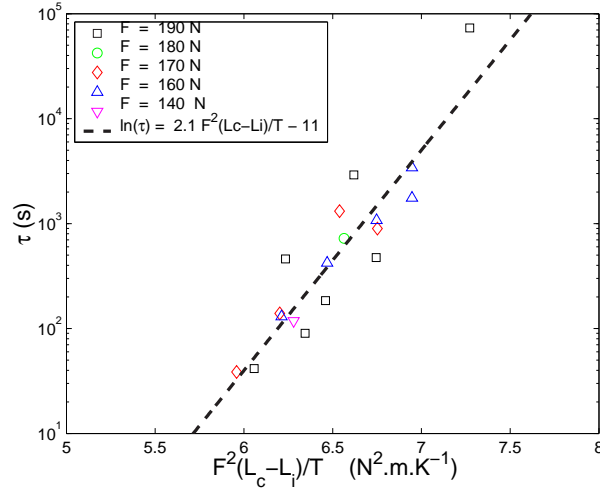


FIG. 3.27 – Temps de vie  $\tau$  en fonction de la barrière d'énergie  $\frac{F^2(L_C - L_i)}{T}$ . Les différents symboles correspondent aux expériences réalisées à différentes forces  $F$  appliquées aux échantillons de papier.

compte ni la longueur du défaut initial, ni le seuil critique de rupture ne peuvent évidemment pas prédire le temps de rupture de nos échantillons.

Nous présenterons au chapitre suivant un modèle simple décrivant la croissance lente d'une fissure selon un processus thermiquement activée, et prédisant un temps de rupture des échantillons suivant une loi d'Arrhénus avec une barrière d'énergie  $\Delta U(F, L_i, L_C)$  dépendant de l'écart au seuil de rupture. Nous verrons que cette barrière d'énergie est différente mais de forme similaire à celle obtenue par analyse des données expérimentales.

Nous allons maintenant examiner les temps de rupture  $\tau$  des échantillons de papier lors des diverses expériences de fluage réalisées dans notre laboratoire, pour lesquelles nous avons décrit précédemment la dynamique de rupture moyenne.

### Analyse des Temps de vie $\tau$

Lors de ces expériences, nous rappelons que la température qui correspond à la température de la salle n'est pas contrôlée. Les variations de température sur l'ensemble des expériences menées, peuvent être de l'ordre de  $10^\circ\text{C}$ . L'analyse précédente montre que de telles variations de température peuvent entraîner des variations non négligeables sur les temps de rupture de nos échantillons (il faudra donc en tenir compte dans notre analyse). En revanche, nous maintenons le taux d'humidité à un taux de l'ordre de  $h \sim 5\%$ .

La force appliquée à l'échantillon varie entre  $F = 140N$  et  $F = 280N$ , et la longueur de la fente initiale entre  $L_i = 1cm$  et  $L_i = 4cm$ . Nous avons alors mesuré des temps de vie  $\tau$  compris entre quelques dizaines de secondes jusqu'à plusieurs jours.

Dans un premier temps, nous examinons le temps de vie en fonction de la force appliquée aux échantillons.

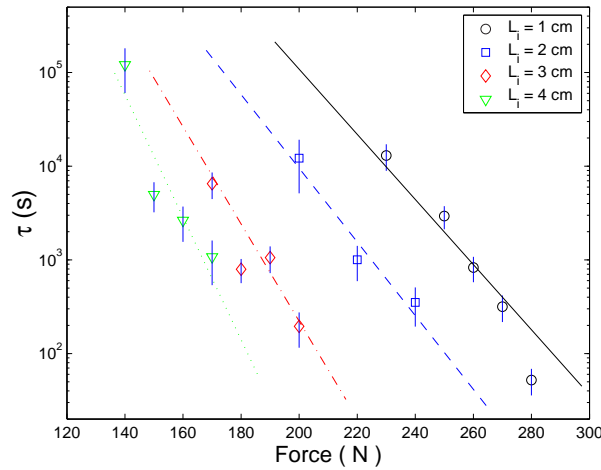


FIG. 3.28 – Temps de vie moyen  $\tau$  des échantillons de papier en fonction de la force appliquée  $F$ . La moyenne est effectuée pour des expériences réalisées dans les mêmes conditions, même chargement  $F$  et même longueur de fente initiale  $L_i$ . Les différentes droites servent des guides pour les yeux.

Nous représentons alors sur la figure 3.28 les valeurs de temps de rupture moyen  $\tau$  mesurées en fonction de la force appliquée aux échantillons  $F$ . La moyenne sur les temps de vie est réalisée pour des conditions expérimentales données, force appliquée  $F$  et longueur de fente initiale  $L_i$  identiques. Il faut remarquer que la dispersion de cette mesure est très importante. Aussi, nous représentons sur la figure 3.28 les barres d'erreurs statistiques.

On peut également observer que les temps de rupture mesurés pour les expériences réalisées à  $L_i = 1cm$  et  $F = 280N$  apparaissent décalés par rapport aux autres temps de rupture pour les expériences avec la même longueur de fente initiale  $L_i = 1cm$ , et différentes forces appliquées  $F$ . Ceci est dû au fait que pour cette série d'expériences, la longueur de fente initiale n'est pas  $L_i = 1cm$ . En effet, la fissure a commencé à grandir durant la rampe de chargement, avant d'atteindre le plateau de force constante soit  $F = 280N$ . La longueur de fente initiale moyenne est en fait pour cette série d'expériences  $\langle L_i \rangle = 1.2cm$ ; les valeurs des temps de rupture mesurés apparaissent alors

tout à fait cohérentes par rapport aux autres mesures. Nous mettons ainsi en évidence une limite de nos expériences : nous ne pouvons pas appliquer instantanément une charge constante aux échantillons. Aussi, il est difficile de mesurer des temps de rupture courts, de l'ordre du temps de chargement jusqu'à la consigne. En effet, lorsque la force appliquée devient importante telle que le facteur d'intensité des contraintes initial  $K_i \sim \sigma\sqrt{L_i}$  est proche du seuil de rupture  $K_c$ , la fissure peut commencer à grandir pendant le chargement de la feuille de papier.

Nous observons donc que le temps de rupture décroît exponentiellement avec la force appliquée à l'échantillon, ce qui a été observé lors d'expériences antérieures [38, 39]. Cependant, la figure 3.28 montre un décalage systématique des temps de vie, en fonction de la longueur de fente initiale  $L_i$ . Aussi, si nous voulons décrire l'endommagement de nos échantillons en terme d'un processus d'activation thermique, avec des temps de rupture suivant une loi d'Arrhénius de la forme  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U}{kT}}$ , la barrière d'énergie à franchir ne dépend donc pas uniquement de la force appliquée  $F$ . L'analyse phénoménologique du paragraphe précédent suggère qu'effectivement la barrière d'énergie décroît en fonction de la contrainte appliquée, comme l'écart entre la contrainte initiale à la pointe de la fissure et le seuil de rupture :  $\Delta U \propto (K_c^2 - K_i^2)$ .

Sur la figure 3.29, nous représentons le temps de vie  $\tau$  des échantillons de papier, en fonction de cette barrière d'énergie qui représente l'écart entre le carré de la contrainte à la pointe du défaut initial estimée grâce au facteur d'intensité des contraintes initial  $K_i^2$  et le carré de la contrainte critique de rupture  $K_c^2$ .

La remise à l'échelle des temps de rupture  $\tau$  apparaît satisfaisante pour les diverses expériences réalisées à des longueurs de fente initiale comprises entre  $L_i = 2\text{cm}$  et  $L_i = 4\text{cm}$ . On observe cependant, pour les tailles de fente initiale  $L_i = 1\text{cm}$  un décalage de l'ordre de 15 – 20%.<sup>2</sup> On peut toutefois constater que l'écart entre les données à  $L_i = 1\text{cm}$  et  $L_i = 4\text{cm}$  est notablement réduit par rapport à ceux de la figure 3.28 qui est de l'ordre de  $\sim 50\%$ .

### Comparaison des temps de rupture $\tau$ pour les différentes expériences

Sur la figure 3.30, on représente le temps de rupture  $\tau$  pour l'ensemble des expériences de fluages réalisées, en fonction de la barrière d'énergie  $\Delta U_\phi$  obtenue à partir de l'analyse phénoménologique précédente.

On observe donc que la barrière d'énergie « phénoménologique »  $\Delta U_\phi = K_c^2 - K_i^2$ , offre une remise à l'échelle correcte, avec une erreur maximum

---

<sup>2</sup>Nous discuterons au chapitre suivant cet écart systématique observé pour les expériences à  $L_i = 1\text{cm}$

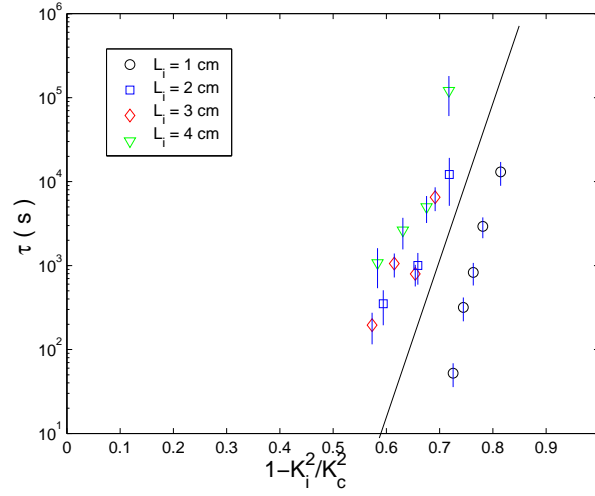


FIG. 3.29 – Temps de vie moyen  $\tau$  des échantillons de papier en fonction de  $\Delta U = 1 - \frac{K_i^2}{K_c^2}$ , écart relatif entre le carré de la contrainte à la pointe du défaut initial  $K_i$ , et le carré du seuil de rupture  $K_c$ . La droite en trait plein sert de guide pour les yeux.

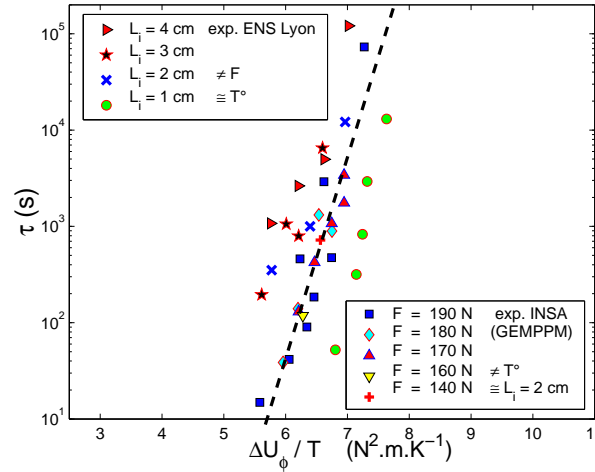


FIG. 3.30 – Temps de vie  $\tau$  des échantillons de papier en fonction de  $\Delta U_\phi = K_c^2 - K_i^2$ , écart relatif entre le carré de la contrainte à la pointe du défaut initial  $K_i$ , et le carré du seuil de rupture  $K_c$ , pour l'ensemble des expériences de fluages réalisées, soit pour différentes longueurs de fente initiale  $L_i$ , différentes forces appliquées  $F$ , différentes températures  $T$ .

de 20% correspondant à l'écart observé précédemment, concernant les expériences réalisées pour différentes forces appliquées  $F$  avec une même longueur de fente initiale  $L_i = 1\text{cm}$ . De plus, pour chaque série d'expériences dans des conditions expérimentales données, les pentes  $\alpha$  des droites  $\ln(\tau) = \alpha\Delta U_\phi$  apparaissent très proches. ( Nous rappelons que pour les expériences à différentes températures réalisées au laboratoire GEMPPM de l'INSA de Lyon, nous n'avons qu'une seule réalisation pour des conditions expérimentales fixées).

#### Commentaires

Avant de conclure l'analyse de la dynamique d'avancement moyenne, nous pouvons commenter rapidement cette analyse des temps de rupture : si la prédiction du temps de vie comme une loi d'Arrhénius, avec une barrière d'énergie du type  $\Delta U \propto (K_c^2 - K_i^2)$  ne semble pas parfaite, l'écart au seuil de rupture semble cependant un paramètre important pour décrire le temps de rupture et la dynamique de rupture de nos échantillons de papier (nous avons remarqué dans les paragraphes précédents que les divers paramètres caractérisant la dynamique moyenne de rupture étaient particulièrement sensibles à l'écart au seuil de rupture, en terme de longueur de la fissure ou de la contrainte à la pointe du défaut). Aussi, il est important de remarquer que les modèles ne prenant pas en compte ni la longueur du défaut initial, ni le seuil critique de rupture ne peuvent évidemment pas prédire le temps de rupture de nos échantillons.

### 3.2.5 Vitesse d'avancement moyenne

Nous pouvons conclure l'analyse de la croissance moyenne du défaut en examinant la vitesse moyenne d'avancement de la fissure. Comme nous avons remarqué que la fissure avance par sauts, la mesure de la vitesse moyenne n'est pas aisée. Cependant, à partir des courbes d'évolution temporelle moyenne de la fissure, pour une même force appliquée  $F$  et une même longueur de fente initiale  $L_i$ , (elles offrent un comportement assez régulier), nous pouvons extraire une vitesse moyenne d'avancement de la fissure comme le montre la figure 3.31, en choisissant des fenêtres de longueur de fissure  $L$  espacées linéairement.

Nous pouvons alors examiner sur la figure 3.32, la vitesse moyenne  $\langle V \rangle$  de croissance de la fissure en fonction de la contrainte à la pointe du défaut  $K$ , mesurée à partir de différentes courbes de croissance moyenne du défaut pour différentes longueurs de fente initiale  $L_i$  et forces appliquées  $F$ .

Nous pouvons remarquer sur la figure 3.32 que la vitesse moyenne de croissance de la fissure croît de manière approximativement exponentielle avec la contrainte à la pointe du défaut.

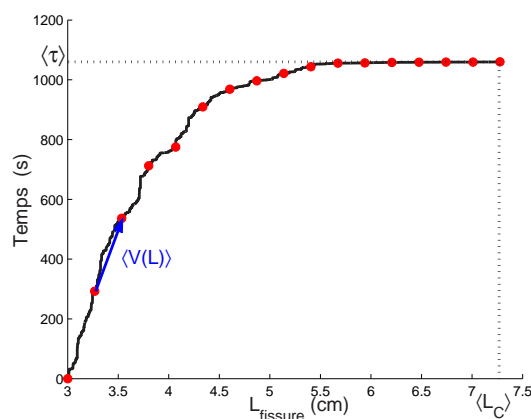


FIG. 3.31 – Mesure de la vitesse moyenne d'avancement de la fissure à partir de la courbe de croissance de la fissure, obtenue en réalisant la moyenne sur 10 expériences de fluage à  $F = 190\text{ N}$  et  $L_i = 3\text{ cm}$ .

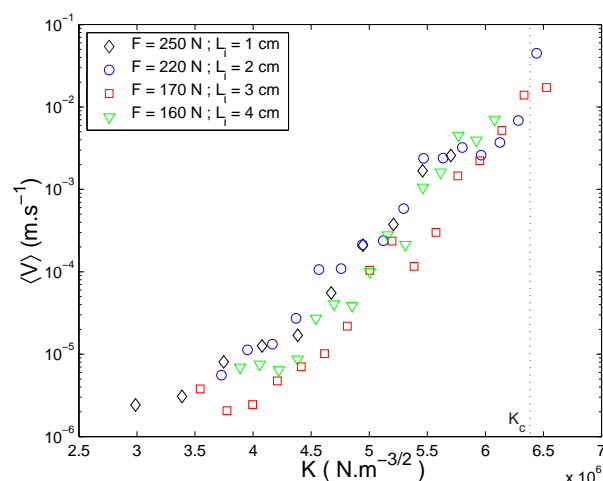


FIG. 3.32 – Vitesse moyenne d'avancement de la fissure  $\langle V \rangle$ , en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure  $K$ , pour différentes expériences de fluage.

Comme nous avons remarqué que l'écart entre le seuil critique de rupture  $K_C$  et la contrainte à la pointe semblait être un paramètre de contrôle de cette dynamique d'endommagement sous-critique, nous allons examiner la vitesse moyenne de la fissure  $\langle V \rangle$ , en fonction de ce paramètre. Sur la figure 4.22, nous représentons donc la vitesse d'avancement moyenne en fonction de l'inverse de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le facteur



d'intensité des contraintes critique  $K_C$  :  $\frac{1}{K_C - K}$ . Nous rappelons la valeur du seuil de rupture :  $K_c = 6.4 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-3/2}$  que nous avons mesuré de différentes manières.

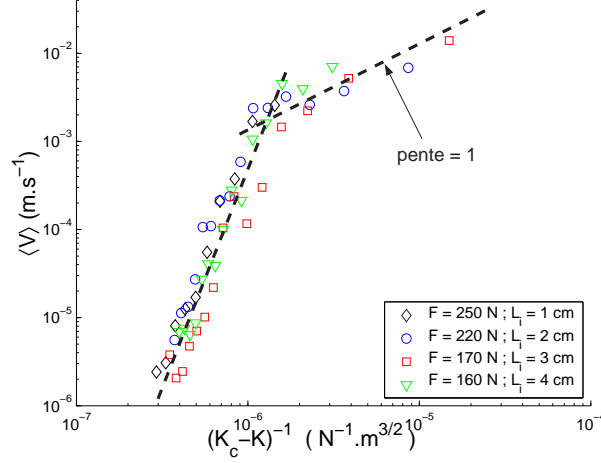


FIG. 3.33 – Vitesse moyenne d'avancement de la fissure  $\langle V \rangle$ , en fonction de l'inverse de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ , pour différentes expériences de fluage.

Nous observons effectivement un comportement singulier de cette vitesse moyenne d'avancement en fonction de l'inverse de l'écart au seuil de rupture. Nous pouvons remarquer 2 différents régimes : proche du seuil de rupture la vitesse de croissance semble diverger de manière linéaire avec l'écart au seuil de rupture  $\frac{1}{K_C - K}$ , et lorsqu'on s'éloigne du seuil de rupture la vitesse de croissance moyenne chute de manière vertigineuse. Nous mesurons des vitesses initiales moyennes de l'ordre de  $V \sim 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ .

Nous montrerons un modèle dans la suite qui nous permet de comprendre ce comportement de la vitesse d'avancement moyenne de la fissure.

Nous avons décrit de manière détaillée la dynamique moyenne de croissance d'une fissure sous contrainte, examinons maintenant le caractère intermittent de cette dynamique.

### 3.3 Analyse de la dynamique intermittente

Nous avons mis en évidence que la croissance de la fissure est intermittente : la fissure reste piégée pendant un certain temps d'attente  $t_w$  et puis soudainement avance d'un saut de taille  $s$ . Cette dynamique intermittente est donc caractérisée par un couple d'événements :  $\{s, t_w\}$ .

### 3.3.1 Détection des sauts

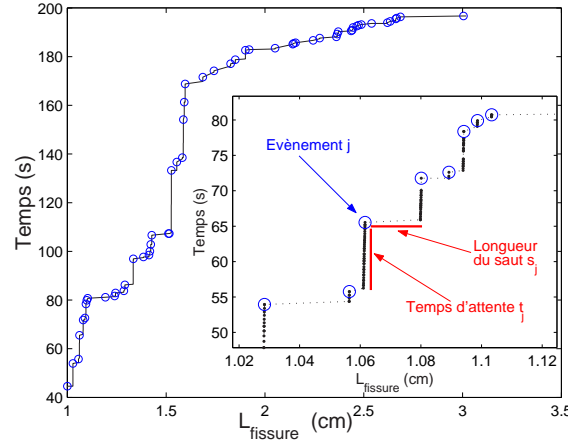


FIG. 3.34 – Courbe de croissance et détection des événements de sauts. Expérience de traction  $F = 270N$  et  $L_i = 1cm$

La figure 3.34 montre le relevé de ces événements à partir des courbes de croissance établies précédemment. Lors d’une expérience de traction, nous détectons typiquement 50 sauts. Chaque événement de saut est caractérisé par sa taille, le temps d’attente pendant lequel la fissure n’a pas avancé, l’instant d’apparition du saut et la longueur de la fissure à cet instant. Nous avons effectué cette procédure pour l’ensemble des différentes expériences réalisées ( $1cm < L_i < 4cm$  et  $140N < F < 280N$ ), correspondant à plus d’une centaine d’expériences. Nous obtenons ainsi de l’ordre de 5000 événements de sauts à analyser.

L’objectif est d’établir les distributions des temps d’attente  $t_w$  et des sauts de longueurs  $s$ , afin de mieux comprendre la nature du processus d’endommagement. Or, afin de pouvoir comparer les différents sauts détectés, il est nécessaire de déterminer le paramètre de contrôle de cette dynamique intermittente. Nous allons montrer que le facteur d’intensité des contraintes qui donne une estimation de la contrainte à la pointe du défaut est la quantité physique jouant le rôle de paramètre de contrôle de la dynamique de rupture sous-critique.

#### Un Paramètre de contrôle : la contrainte à la pointe de la fissure

La figure 3.35 montre les histogrammes de la taille des sauts de longueur de la fissure relativement à la longueur de la fissure. L’analyse des

histogrammes 3.35 offre une estimation de la zone d'endommagement, dite "process zone", distance en avant de la pointe de la fissure jusqu'à laquelle les évènements de fracturation se produisent.

Nous pouvons observer que 97% des sauts sont tels que la longueur de la fissure est dix fois plus importante que la taille des sauts soit  $\frac{L_{Saut}}{L_{fissure}} < 0.1$ .

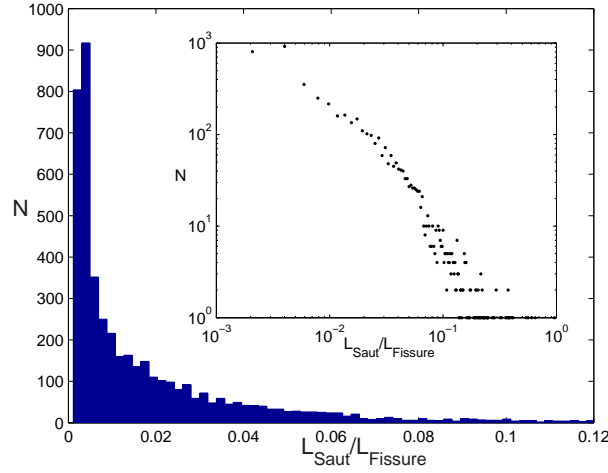


FIG. 3.35 – Histogrammes du rapport entre la taille d'un saut et la longueur de la fissure  $\frac{L_{Saut}}{L_{fissure}}$

On remarque donc, que dans nos expériences de fracture, les évènements de rupture apparaissent à proximité de la pointe du défaut. Ceci montre une nouvelle fois l'importance du phénomène d'intensification de la contrainte à la pointe de la fissure, qui provoque l'avancement de la fissure. Nous avons déjà mis en évidence le rôle crucial de ce phénomène d'amplification de la contrainte en tête du défaut en examinant la longueur critique de rupture  $L_c$  en fonction de la contrainte appliquée ( voir la figure 3.12).

Ainsi, la contrainte à la pointe de la fissure apparaît comme la quantité physique gouvernant la dynamique de rupture. Cette grandeur peut être estimée notamment grâce au facteur d'intensité de contraintes  $K$ . Comme nous avons mesuré la longueur de la fissure correspondante pour chaque saut, nous pouvons en déduire la contrainte à la pointe du défaut au moment du saut, grâce au facteur d'intensité de contraintes correspondant :  $K = \sigma \sqrt{L\psi(\frac{H}{L})}$  où  $\psi$  est un facteur de correction géométrique. La figure 3.36 montre les distributions des facteurs d'intensité de contraintes  $K$ .

Nous pouvons déduire de l'examen de ces distributions le seuil de rupture de nos échantillons, correspondant au facteur d'intensité des contraintes

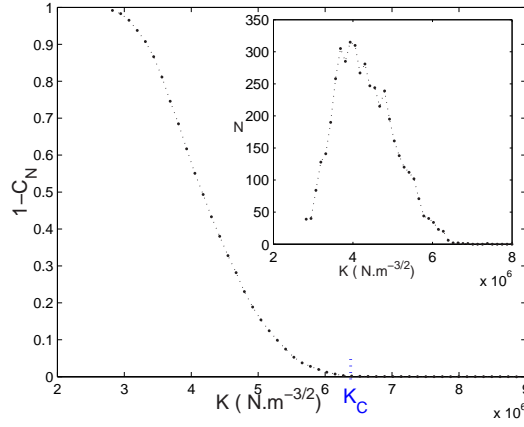


FIG. 3.36 – Distribution Cumulée normalisée  $C_N$  des facteurs d'intensité des contraintes et en insert distribution des facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . Les distributions sont construites en utilisant les facteurs d'intensité des contraintes  $K$  mesurés au moment d'un saut pour l'ensemble des expériences réalisées.

critique, en déterminant la valeur de  $K$  au delà de laquelle la probabilité d'obtenir un saut devient nulle, (en pratique, nous avons déterminé la valeur de  $K$  à partir de laquelle  $\epsilon = 1 - \frac{C_N(K)}{\max(C_N)} < p = 2.10^{-3}$ )<sup>3</sup>. Nous obtenons alors  $K_C = (6.4 \pm 0.1)10^6 N.m^{-\frac{3}{2}}$ . On remarque que cette valeur est en très bon accord avec la valeur obtenue à partir de l'examen des longueurs critiques mesurées pour chaque expérience, soit  $K_C = (6.1 \pm 0.3)10^6 N.m^{-\frac{3}{2}}$ .

Nous allons donc ordonner l'ensemble des événements de sauts détectés en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure, afin d'examiner la distribution des sauts de longueur de la fissure.

### 3.3.2 Sauts de longueur

#### Distribution des sauts de longueur

Nous pouvons désormais examiner la distribution des sauts de longueur de fissure pour différentes valeurs du facteur d'intensité des contraintes  $K$ . La figure 3.37 montre les distributions des tailles de saut pour l'ensemble des sauts détectés, pour différents intervalles de valeurs de  $K$ . Pour obtenir chaque distribution, nous avons utilisé le même nombre de points, soit typiquement 1000 points. Puis, nous choisissons une fenêtre logarithmique. Nous précisons sur la figure 3.37 les gammes de facteurs d'intensité des contraintes

<sup>3</sup>p correspond à la probabilité d'obtenir moins de 10 sauts sur les 5000 détectés

choisies  $K$ . On remarque que pour les valeurs de  $K$  les plus faibles et les plus importantes (respectivement loin et proche du seuil de rupture), les bandes de  $K$  sont plus larges, dû au manque de statistiques.

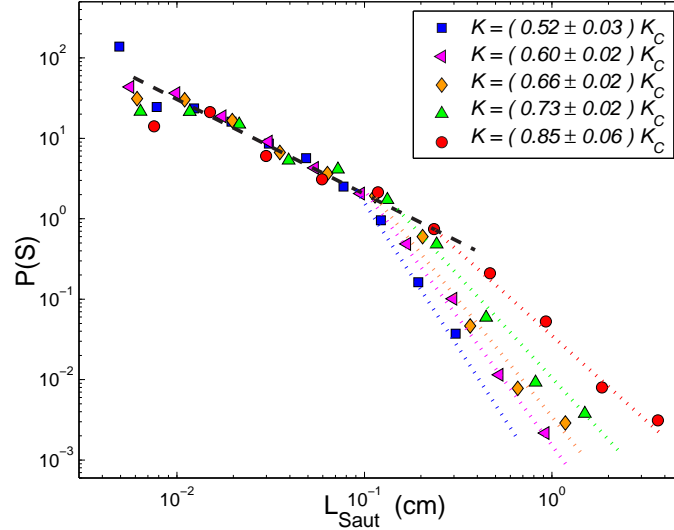


FIG. 3.37 – Distribution de probabilité des tailles de sauts pour différentes valeurs du facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . Les droites en traits discontinus et pointillés servent de guides pour les yeux.

Nous observons 2 régimes, selon la taille des sauts. Pour les petites tailles de sauts comprises entre environ  $100\mu m$  (qui correspond à la résolution de notre détection) et  $1mm$  environ, la distribution ne dépend pas de la valeur du facteur d'intensité des contraintes. Alors que pour les tailles de sauts plus importantes, nous remarquons que la queue de la distribution évolue en fonction de la contrainte à la pointe du défaut. En effet, on observe une longueur de coupure qui augmente avec le facteur d'intensité des contraintes  $K$ . Ceci met en évidence que la taille moyenne des sauts augmente avec la contrainte à la pointe de la fissure, lorsqu'on se rapproche du seuil de rupture.

### Taille moyenne des sauts de longueur

Nous pouvons également examiner la taille moyenne des sauts en fonction du facteur d'intensité des contraintes. Comme pour l'étude des distributions de taille de sauts, nous effectuons notre analyse (ici une moyenne), sur un même nombre de points. Comme l'estimation de la valeur moyenne exige moins de statistiques que pour celle de la distribution, nous pouvons réduire ce nombre de points et donc effectuer notre étude pour un plus grand nombre

de boîtes de différentes valeurs de  $K$ . Les barres d'erreur sur les figures 3.38 permettent de visualiser la largeur des bandes de  $K$  sur lesquelles nous effectuons la moyenne des tailles de sauts.

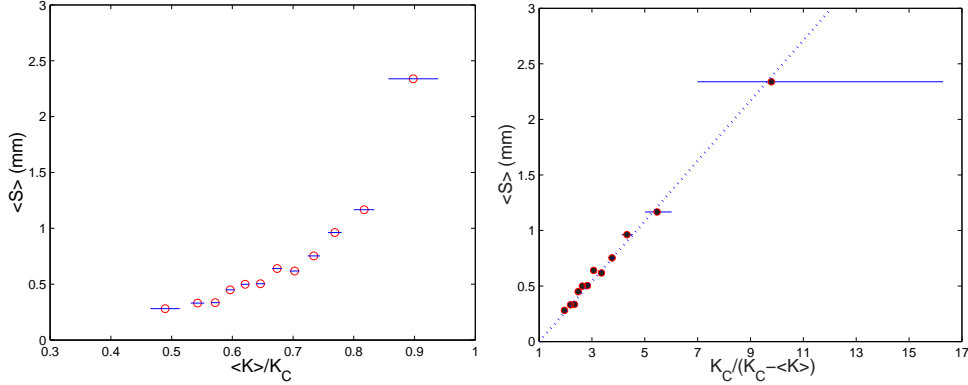


FIG. 3.38 – à gauche : Taille moyenne des sauts  $\langle S \rangle$ , en fonction du facteur d'intensité des contraintes  $K$  normalisé par le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ . à droite : Taille moyenne des sauts  $\langle S \rangle$ , en fonction de l'inverse de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ . La droite en pointillés bleus est le meilleur fit linéaire :  $y = 0.27(x - 1)$

Nous remarquons sur les figures 3.38 que la taille moyenne des sauts augmente très fortement avec le facteur d'intensité des contraintes et diverge à l'approche du seuil de rupture  $K_C$ . La figure 3.38 de droite montre la divergence de la taille moyenne des sauts qui se comporte linéairement en fonction de l'écart au seuil de rupture :  $\frac{K_C}{K_C - K}$ .

### 3.3.3 Temps d'attente

#### Distribution des temps d'attente

Nous pouvons réaliser la même analyse pour étudier les temps d'attente séparant 2 sauts consécutifs. Nous présentons sur la figure 3.39, la distribution de probabilité des temps d'attente  $t_w$  pour la même gamme de facteurs d'intensité des contraintes  $K$  que celle choisie précédemment. Chaque distribution de probabilité a été obtenue avec le même nombre de points.

Nous remarquons que la dépendance de la distribution de probabilité des temps d'attente  $t_w$  en fonction du facteur d'intensité de contraintes  $K$  n'est pas aussi claire que celle pour les distributions des tailles de sauts. Cependant, on peut remarquer un décalage systématique vers la gauche des distributions,

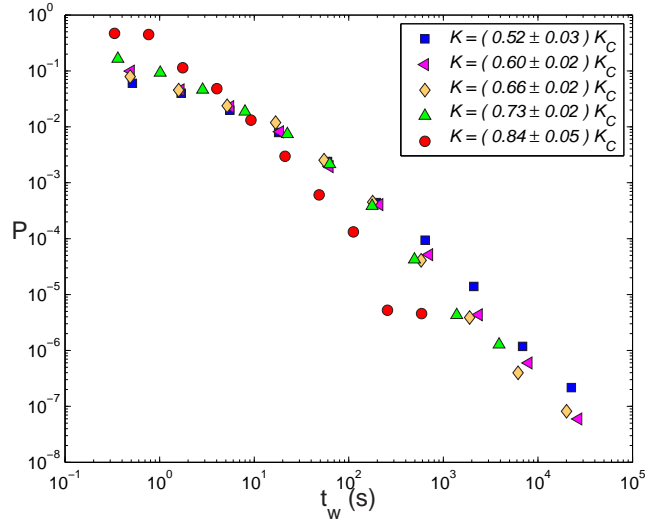


FIG. 3.39 – Distribution de probabilité des temps d'attente  $t_w$  séparant 2 sauts consécutifs pour différentes valeurs du facteurs d'intensité des contraintes  $K$ .

lorsqu'on se rapproche du seuil de rupture  $K_C$ . Ceci correspond au fait que le temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  diminue en fonction du facteur d'intensité des contraintes  $K$ .

### Temps d'attente moyen

Nous allons donc examiner le temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure.

La figure 3.40 montre que le temps d'attente moyen semble diminuer de manière exponentielle en fonction de la contrainte à la pointe du défaut estimée grâce au facteur d'intensité des contraintes  $K$ , lorsqu'on se rapproche du seuil de rupture  $K_C$ . Les barres d'erreur permettent de visualiser la largeur des intervalles de  $K$  sur lesquels on réalise les moyennes.

On peut remarquer qu'il semble difficile de mesurer des temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  plus grands que 1000s. On est amené à se demander si cet effet n'est pas dû à un problème de bruit lors de notre analyse d'images où l'on considère peut-être à tort des petits sauts de 1 pixel (surtout que la probabilité d'avoir un évènement dû au bruit est d'autant plus grande que le temps d'attente est long)<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Nous discuterons cet éventuel problème de bruit au chapitre 5, qui pourrait avoir des implications aussi sur la distribution des tailles de sauts

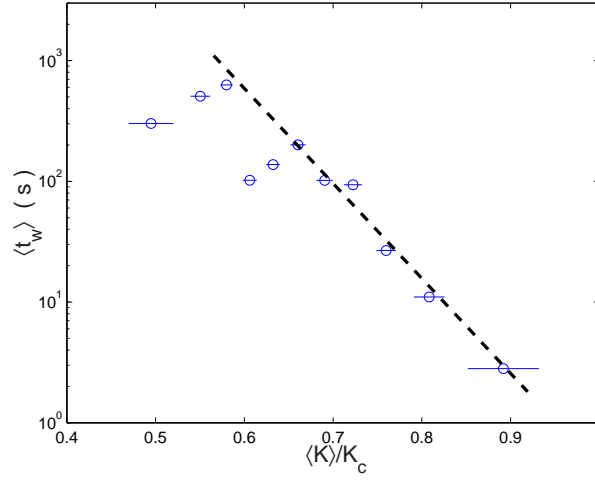


FIG. 3.40 – Temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure  $K$ . La droite en traits pointillés sert de guide pour les yeux.

De plus, on remarque que l'écart-type des temps d'attente est de 2 à 10 fois plus grands que le temps d'attente moyen. Cela veut dire que sur une bande de  $K$  donnée, on moyenne sur des temps d'attente très différents.

Cependant, on peut noter sur la figure 3.41 que lorsqu'on normalise les temps d'attente  $t_w$  par le temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  pour une gamme de facteurs d'intensité des contraintes donné  $K$ , les différentes courbes représentant la distribution des temps d'attente normalisés  $\frac{t_w}{\langle t_w \rangle}$  se regroupent de façon remarquable sur une seule et même courbe.

On remarque alors 2 régimes<sup>5</sup> en loi de puissance, de pentes  $p_1 \sim -2/3$  et  $p_2 \sim -2$  qui correspondent respectivement aux temps d'attente tels que  $t_w \leq \langle t_w \rangle$  et  $t_w \geq \langle t_w \rangle$ .

### 3.4 Expériences de fluage sur d'autres matériaux

Avant de conclure ce chapitre et de rappeler les résultats expérimentaux obtenus, nous allons présenter des résultats d'expériences de fluage sur des matériaux de structures et de propriétés mécaniques très différentes du papier. Ces expériences ont été réalisées exactement dans les mêmes conditions que les expériences présentées sur les échantillons de papier.

<sup>5</sup>Nous discuterons de cette remise à l'échelle fort surprenante lors de l'analyse des temps de vie dans nos simulations numériques au chapitre 5



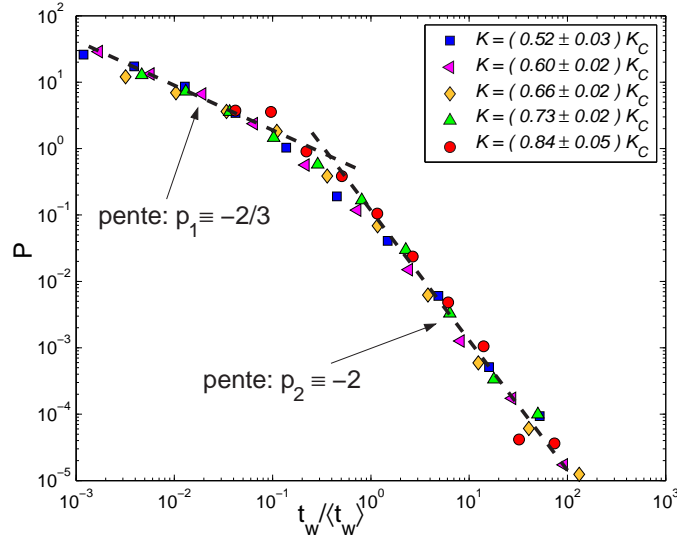


FIG. 3.41 – Distribution de probabilité des temps d'attente  $t_w$  séparant 2 sauts consécutifs, normalisés par le temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  pour différentes valeurs du facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . Les droites de pente en traits pointillés servent de guides pour les yeux.

En premier lieu, l'objectif est de voir si l'on observe le même comportement d'endommagement sous-critique, sur différents matériaux. Ensuite, à partir des différentes observations, nous mettrons en évidence notamment l'importance de la structure fibreuse dans les échantillons de papier, de tissus voire de polycarbonate et du rôle des hétérogénéités dans ces matériaux, ce qui motivera notre approche théorique, que nous présenterons au chapitre suivant.

### 3.4.1 Les films de polycarbonate

Lors d'expériences de chargement à force constante  $F$  sur des échantillons comportant un défaut initial macroscopique, nous observons comme pour les expériences réalisées sur les feuilles de papier un phénomène dit de rupture retardée, ie de fracturation lente sous-critique.

Le film de polycarbonate soumis à une contrainte inférieure à son seuil de rupture intrinsèque, casse au bout d'un temps  $\tau$  à cause de la croissance du défaut macroscopique depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$ , où la rupture est alors brutale.

La figure suivante 3.42 montre une courbe de croissance typique obtenue

lors d'une expérience de fluage à force  $F = 900N$  et  $L_i = 1.5cm$ .

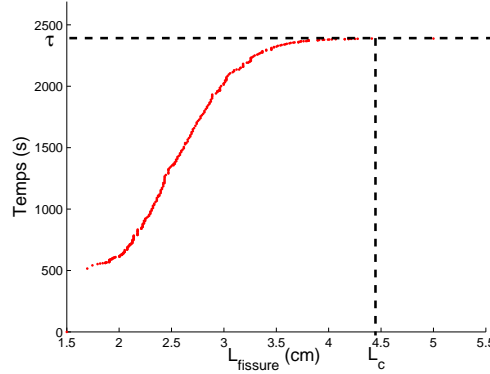


FIG. 3.42 – Evolution temporelle d'une fissure de longueur initiale  $L_i = 1cm$ , jusqu'à une longueur critique  $L_C \sim 4.5cm$ , lors d'une expérience de fluage à  $F = 900N$  sur un film de polycarbonate.

On remarque que la croissance du défaut est régulière contrairement à l'évolution de la fissure dans les feuilles de papier. En effet, on n'observe pas de sauts de longueurs de fissure, ni de temps d'attente pendant lesquels la fissure reste piégée. De plus, on peut remarquer qu'au début de l'expérience la vitesse de croissance est importante, avant de se stabiliser. Cet effet est probablement dû au caractère viscoélastique du polycarbonate (effet de mémoire du chargement à vitesse constante jusqu'à la consigne). Ensuite, on remarque bien comme dans les expériences sur le papier, une accélération de la fissure à l'approche du seuil de rupture. Cependant, l'approche du temps de rupture  $\tau$  ne peut être décrite comme dans les expériences précédentes par une exponentielle. On peut également observer que les temps de rupture  $\tau$  sont pour ces expériences très largement distribués (écart-type du temps de rupture de l'ordre du temps de rupture moyen) comme pour les expériences sur les feuilles de papier.

On observe sur la figure 3.43 que le front de fracture n'est pas rugueux comme dans le papier. De plus, on peut remarquer à la pointe du défaut une ligne sombre, qui marque une transition de variation d'épaisseur du film. Cette ligne sombre apparaît durant le chargement de l'échantillon pour des forces de l'ordre de  $400N$  et développe une zone en forme de "flamme" à la pointe de la fissure, qui grandit de façon similaire au défaut, comme le montre la figure 3.44.

L'étude de l'apparition et de la croissance de cette zone est en cours [27]. L'observation sous microscopie 3.4.1 de cette zone a notamment révélé un

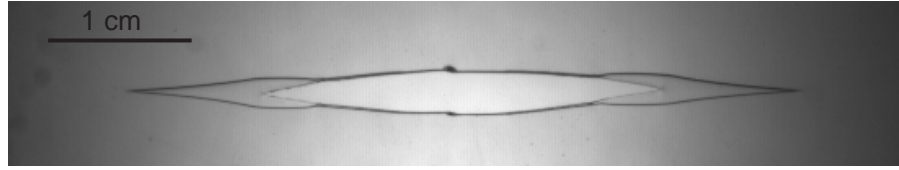


FIG. 3.43 – Image (zoom) typique enregistrée par la caméra, lors d'une expérience de fluage à  $F = 850N$  et  $L_i = 2cm$ . On remarque la fissure (zone blanche) et des lignes sombres délimitant une zone en forme de "flamme" entourant la pointe du défaut.

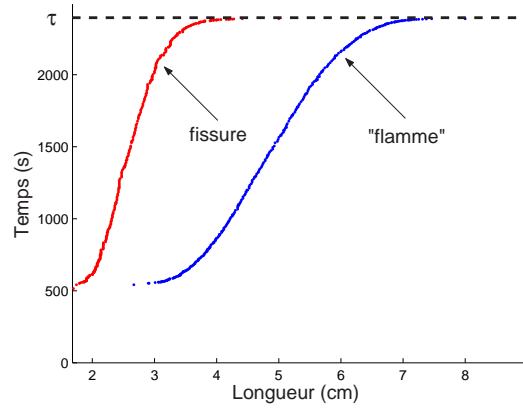


FIG. 3.44 – Evolution temporelle d'une fissure de longueur initiale  $L_i = 1cm$ , jusqu'à une longueur critique  $L_C \sim 4.5cm$ , et de la "flamme" lors d'une expérience de fluage à  $F = 900N$  sur un film de polycarbonate.

motif particulier sous formes de vagues de longueurs d'ondes de l'ordre de  $22\mu m$ , probablement dues à des variations d'épaisseur du film.

### 3.4.2 Les rideaux

Lors d'expériences de fluage sur des échantillons carré de tissu, on a pu observer également un phénomène de rupture sous-critique. De plus, sur ce type de matériau qui forme un réseau bidimensionnel parfait, on a pu voir la croissance par sauts d'une fissure. La fissure avance de façon intermittente en cassant des fibres en tête du défaut, puis elle peut rester piégée, avant d'effectuer un nouveau pas.

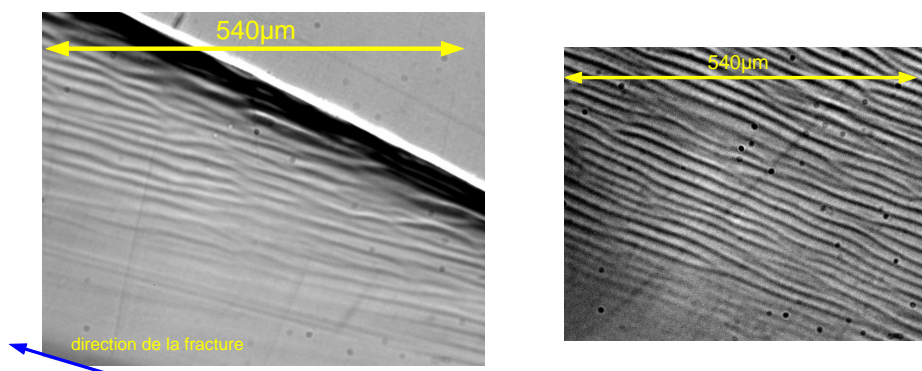


FIG. 3.45 – Observation sous microscope de la zone en forme de "flamme" en tête de la fissure dans un film de polycarbonate.

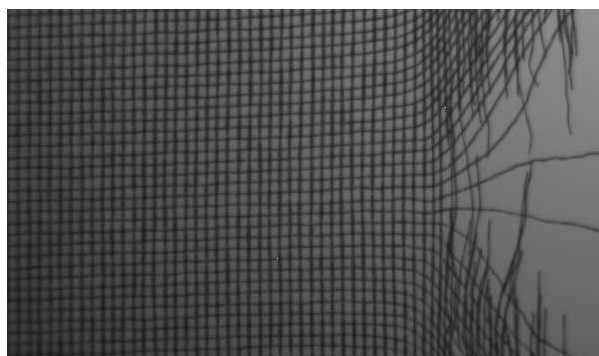


FIG. 3.46 – Pointe de la fissure, lors d'une expérience de fluage sur un échantillon carré de tissu. Ce matériau forme un réseau bidimensionnel parfait, à une échelle millimétrique.

### 3.4.3 Les feuilles d'acier et de laiton

Lors des expériences de fluage sur des feuilles de laiton ou d'acier, nous n'avons pas observé de manière reproductible la croissance lente d'une fissure et surtout le phénomène de piégeage du défaut. Les échantillons comportaient un défaut macroscopique initial de longueur comprise entre  $L_i = 1\text{cm}$  et  $L_i = 2\text{cm}$ . Les expériences ont été réalisées à température ambiante.

En pratique, nous n'avons observé que 2 types de comportement de nos échantillons sous contrainte, pour exactement les mêmes conditions expérimentales, i.e même force appliquée et même longueur de fente initiale :

- soit l'existence d'une fissure stable sur des temps indéfiniment longs,
- soit la rupture brutale de l'échantillon.

Avant de conclure ce chapitre, nous pouvons commenter ces derniers résultats qui mettent en évidence le rôle de la structure du matériau dans la dynamique de rupture sous-critique.

### 3.4.4 Rôle de la structure et des hétérogénéités

Lorsqu'on a soumis *divers matériaux fibreux* à un chargement constant, comportant un défaut initial macroscopique, nous avons pu mettre en évidence un phénomène d'endommagement sous-critique, caractérisé par la croissance lente du défaut depuis sa longueur initiale  $L_i$ , jusqu'à une longueur critique  $L_C$  où l'échantillon casse brutalement.

Un point commun aux matériaux comme le papier, le tissu ou les films de polycarbonate qui ont des propriétés mécaniques très différentes, semble être la structure fibreuse ou filamenteuse dans le cas du polymère. Aussi, nous n'avons pas observé de croissance par sauts lors des expériences de fluage sur les films de polycarbonate, contrairement aux expériences sur le tissu et le papier. Ceci est probablement dû aux échelles mises en jeu. En effet, la taille de la structure fibreuse et des hétérogénéités sont à des échelles beaucoup plus grandes, micrométrique dans le papier et millimétrique pour le tissu, que l'échelle de la structure amorphe dans les films de polycarbonate. De plus, d'autres expériences de fractures sur des polymères ayant une structure semi-cristalline (structure lamellaires de taille micrométrique) présentent également un mécanisme de croissance par sauts [19, 34, 65].

D'autre part, nous n'avons effectivement pas observé de rupture lente sur des matériaux comme de l'acier ou du laiton. Cette différence ne peut être dû au caractère plastique de ces matériaux, puisque les films de polycarbonate présentent également une forte plasticité. Nous pensons plutôt que le type de structure (fibreuse *vs* granuleuse) est à l'origine des différences observées et joue un rôle crucial dans cette dynamique lente de rupture. On pourrait peut être évoquer également la taille des hétérogénéités, si l'on pense aux dislocations dans les métaux qui sont des distorsions du réseau cristallin et donc à des échelles plus petites que les défauts dans les autres matériaux considérés.

Ces résultats vont effectivement motiver notre approche théorique, où nous allons examiner notamment l'effet de la nature discrète du matériau.

### 3.4.5 Conclusion

En conclusion, nous rappelons les résultats expérimentaux obtenus lors de l'étude extensive de la dynamique de rupture des feuilles de papier.

Dans nos expériences de fluage sur des échantillons de papier, nous avons pu observer que la dynamique de croissance d'un défaut unique offre un comportement particulièrement riche et complexe. En effet, lorsqu'on soumet une feuille de papier comportant un défaut macroscopique initial à une contrainte constante, on observe un phénomène d'endommagement progressif avec une dynamique de croissance très irrégulière : on observe des temps d'attente  $t_w$  pendant lesquels la fissure reste piégée et n'avance pas, puis soudainement la fissure va effectuer un saut de longueur  $s$ . La fissure avance donc par sauts depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique de rupture  $L_C$  où alors l'échantillon casse soudainement. La mesure de l'énergie de surface nécessaire pour ouvrir la fente permet de distinguer la longueur critique prédite par Griffith  $L_G$  et cette longueur critique de rupture  $L_C$ .

Une analyse statistique montre d'une part que la courbe d'évolution moyenne de la fissure semble suivre une loi exponentielle déterminée par 2 paramètres : une longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  et le temps de vie des échantillons  $\tau$ . Nous avons pu mettre en évidence la dépendance de ces divers paramètres en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure. En particulier, l'écart au seuil de rupture (l'écart entre la contrainte critique de rupture  $K_C$  et la contrainte à la pointe de la fissure  $K$ ), apparaît un paramètre déterminant dans la description de cet dynamique de rupture sous-critique, notamment pour prédire le temps de rupture des échantillons. De plus, des expériences de fluages réalisées à haute température révèlent la dépendance des temps de rupture en fonction de la température. Les résultats obtenus sont en bon accord avec des expériences antérieures [38, 39], où le temps de rupture  $\tau$  suit une loi d'Arrhenius  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$  avec une barrière d'énergie  $\Delta U$  décroissant avec la contrainte  $\sigma$  (cependant, nous avons montré que la forme de la barrière d'énergie proposé par Zhurkov [39] ne peut remettre à l'échelle les temps de rupture de nos échantillons).

D'autre part, l'étude des sauts de longueur de la fissure et des temps d'attente pendant lesquels la fissure reste piégée offre des formes de distribution singulières qui évoluent avec la contrainte à la pointe de la fissure. De plus, nous avons remarqué notamment que la taille moyenne des sauts diverge linéairement avec l'écart au seuil de rupture.

Nous allons montrer dans le chapitre suivant que cette dynamique de rupture sous-critique peut être décrite simplement, en examinant une plaque homogène parfaitement élastique jusqu'à une échelle discrète  $\lambda$  (correspondant à la taille des fibres), et comportant une fissure. Nous décrirons alors la croissance lente de cette fissure par rupture fragile comme un processus d'activation thermique où les fluctuations de contraintes permettent de franchir un seuil de rupture par sauts irréversibles.



# Chapitre 4

## Mécanisme de croissance thermiquement activée

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Fluctuations statistiques de contraintes . . . . .</b>	<b>95</b>
4.1.1	Milieu élastique $2d$ continu . . . . .	95
4.1.2	Plaque élastique discrète avec un défaut . . . . .	96
<b>4.2</b>	<b>Dynamique de croissance moyenne de la fissure .</b>	<b>97</b>
4.2.1	Mécanisme de rupture . . . . .	97
4.2.2	Un processus de rupture irréversible . . . . .	98
<b>4.3</b>	<b>Modèle numérique : réseau 2d de ressorts . . . . .</b>	<b>100</b>
4.3.1	Présentation du modèle numérique . . . . .	101
4.3.2	Croissance de la fissure . . . . .	103
<b>4.4</b>	<b>Comparaison aux résultats expérimentaux . . . . .</b>	<b>115</b>
4.4.1	Longueur de croissance caractéristique $\zeta$ . . . . .	116
4.4.2	Temps de rupture $\tau$ . . . . .	117
<b>4.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>124</b>

---

Nos expériences de fluage sur des matériaux fibreux et en particulier des échantillons de papier montrent un phénomène d'endommagement progressif où un défaut unique croît depuis sa longueur initiale jusqu'à une longueur critique. Divers travaux expérimentaux [38, 39, 50, 51] et théoriques [41, 43, 44, 45] proposent un processus thermiquement activé pour expliquer cet endommagement sous-critique et prédire le retard à la rupture.

Dans ce chapitre, nous examinons une plaque homogène parfaitement élastique jusqu'à une échelle discrète  $\lambda$ . Nous décrivons alors la croissance



lente d'une fissure dans cette plaque, comme un processus d'activation thermique où les fluctuations de contraintes permettent de franchir un seuil de rupture par sauts irréversibles. Nous comparons les prédictions analytiques aux résultats expérimentaux et numériques (pour un réseau  $2d$  de ressorts).

## 4.1 Fluctuations statistiques de contraintes

### 4.1.1 Milieu élastique 2d continu

Nous considérons une plaque homogène, parfaitement élastique, soumise à une contrainte constante  $\sigma$ , en "situation canonique" : ce système est en contact thermique avec un thermostat qui impose sa température  $T$ . Les fluctuations statistiques dues aux échanges de température entre le thermostat et la plaque vont alors provoquer des fluctuations de contraintes à déformation imposée dans le matériau. Nous allons rappeler que la distribution des fluctuations de contraintes  $\sigma_f$  peut être obtenue à partir de considérations simples de physique statistique[8].

#### Rappel de physique statistique : "description canonique"

On considère un système macroscopique  $S$  en contact thermique avec un thermostat  $\mathfrak{S}$  qui impose sa température  $T$ . Le système  $S$  est caractérisé par des paramètres extérieurs  $x$ , et des variables internes  $y$ , comme l'énergie. A l'équilibre thermique,  $S$  se trouve dans la "situation canonique", où les variables internes fluctuent par suite des échanges de chaleur avec le thermostat  $\mathfrak{S}$ . Pour un système maintenu à température constante  $T$ , la distribution statistique de la variable interne  $y$  est donnée par l'énergie libre du système  $F$  :

$$P(y) \propto \exp \left[ -\frac{1}{k_B T} F(T, x, y) \right] \quad (4.1)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann. Lorsqu'on développe l'énergie libre  $F$  autour de sa valeur la plus probable  $y_m$  (telle que  $\frac{\partial F}{\partial y}(T, x, y_m) = 0$ ), on obtient, en négligeant les termes d'ordre supérieurs à 2, une distribution statistique de la variable interne  $y$  gaussienne :

$$P(y) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Delta y\rangle^2}} \exp \left[ -\frac{(y - y_m)^2}{2\langle\Delta y\rangle^2} \right] \quad (4.2)$$

où l'écart quadratique moyen  $\langle\Delta y\rangle^2$  est donné par  $\langle\Delta y\rangle^2 = \frac{kT}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(T, x, y_m)}$ .

#### Fluctuations statistiques de contraintes dans un milieu continu

Nous considérons donc notre plaque en contact thermique avec un thermostat, qui impose sa température  $T$ . Les contraintes locales dans le matériau  $\sigma_f$ , considérées comme variable interne de notre système, fluctuent sous l'effet des échanges thermiques avec le thermostat.

L'énergie libre  $F$  par unité de volume  $V$  de notre plaque élastique, soumise à une contrainte constante  $\sigma$  s'écrit :

$$\phi = \frac{F}{V} = \frac{\sigma^2}{2Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \frac{V}{Y}$$

A température  $T$  donnée, la distribution des fluctuations de contraintes  $\sigma_f$ , dans un volume  $V$  fixé de notre plaque élastique, soumise à une charge uniaxiale  $\sigma$ , est alors donnée par l'équation 4.1 :

$$P(\sigma_f) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Delta\sigma\rangle^2}} \exp \left[ -\frac{(\sigma_f - \sigma)^2}{2\langle\Delta\sigma_f\rangle^2} \right] \quad (4.3)$$

où  $\langle\Delta\sigma_f\rangle^2 = k_B T Y / V$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température, et  $Y$  le module d'Young de la plaque élastique.

#### Commentaires

- Il est important de remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer d'approximations pour déterminer cette distribution des fluctuations de contraintes dans une plaque élastique.
- La forme gaussienne de cette distribution, issue du caractère élastique de la plaque considérée, sera un point clé de notre approche théorique.

Nous supposons dans la suite que cette analyse concernant un milieu élastique continu, reste valable pour un système discret et en présence d'une fissure.

### 4.1.2 Plaque élastique discrète avec un défaut

Examinons le milieu idéal suivant, représenté sur la figure 5.1. Nous considérons une plaque homogène, parfaitement élastique, présentant un défaut en son centre, avec une échelle caractéristique de longueur de discrétisation  $\lambda$ . Cette échelle de longueur est par exemple la distance inter-atomique dans un cristal parfait. Dans nos échantillons de papier, cette distance caractéristique correspond plutôt à la taille des fibres, échelle mésoscopique intermédiaire de l'ordre de  $20\mu m$ .

En présence d'une fissure, la concentration des contraintes augmente la probabilité de casser à la pointe de la fissure. Nous supposons, malgré la très forte divergence de la contrainte à la pointe, que la distribution des fluctuations de contraintes  $\sigma_f$  reste gaussienne de la forme éq. (4.3). Nous avons vérifié cette hypothèse lorsque le matériau est discret et en présence d'une fissure, au moyen d'une simulation en dynamique moléculaire d'un réseau bi-dimensionnel de ressorts [28].

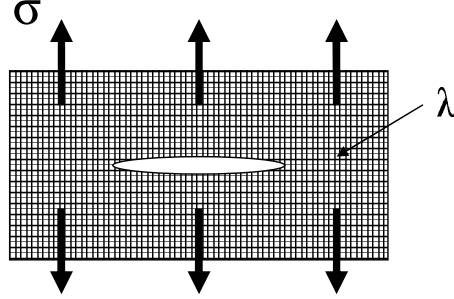


FIG. 4.1 – Plaque élastique comportant une fissure, soumise à une contrainte  $\sigma$ . Le matériau devient discontinu à l'échelle  $\lambda$ .

L'analyse des contraintes et de leur fluctuations à la pointe de la fissure va nous permettre de proposer un mécanisme de croissance de la fissure.

## 4.2 Dynamique de croissance moyenne de la fissure

### 4.2.1 Mécanisme de rupture

Le facteur d'intensité des contraintes  $K$  mesure l'amplitude de la divergence des contraintes à proximité de la pointe de la fissure de longueur  $L$ , et permet d'estimer la contrainte locale à la pointe de ce défaut, à l'échelle discrète  $\lambda$  :  $\sigma_m = K/\sqrt{\lambda}$ . Le seuil de rupture à la pointe de la fente  $\sigma_c$  correspond à une valeur critique du facteur d'intensité de contrainte  $K_c$ .

Le matériau va casser lorsque les fluctuations de contraintes  $\sigma_f$  permettent d'atteindre la contrainte critique  $\sigma_c$  correspondant au seuil de rupture. Le processus d'endommagement proposé est représenté schématiquement sur la figure 4.2.

La probabilité d'obtenir de telles fluctuations est donnée par la probabilité cumulée  $\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) = \int_{\sigma_c}^{\infty} p(\sigma_f) d\sigma_f$ . Cette probabilité cumulée  $\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c)$ , somme de distributions gaussiennes, peut s'écrire grâce à la fonction "Erreur Complémentaire"  $\text{erfc}$ , de la manière suivante :

$$\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) = \text{erfc}\left(\sqrt{U_c}\right) = \int_{U_c}^{\infty} \frac{e^{-U_f}}{\sqrt{\pi U_f}} dU_f \quad (4.4)$$

avec

$$U_f(\sigma_f) = \frac{(\sigma_f - \sigma_m)^2 V}{2Yk_B T}$$

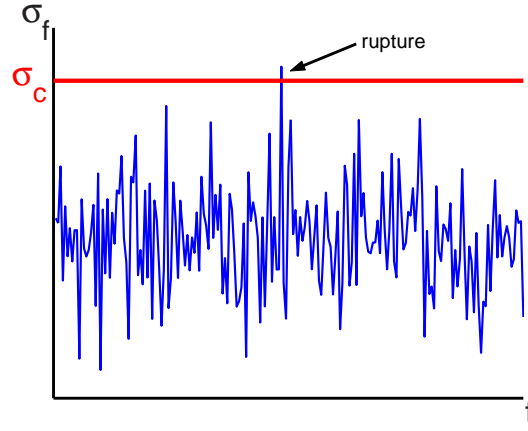


FIG. 4.2 – Représentation schématique des fluctuations de contraintes  $\sigma_f$  gaussiennes à la pointe de la fissure. Le matériau casse lorsque la contrainte  $\sigma_f$  dépasse, sous l'effet des fluctuations de température, le seuil de rupture  $\sigma_c$ .

$$\text{et} \quad U_c = U_f(\sigma_c) = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T}$$

#### 4.2.2 Un processus de rupture irréversible

En supposant que le processus de rupture est irréversible, la fissure ne peut que s'aggrandir. Nous faisons alors l'hypothèse que la vitesse d'avancement de la fissure  $v$  est proportionnelle à la probabilité d'obtenir de telles fluctuations de contraintes  $\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c)$  supérieures au seuil de rupture  $\sigma_c$  :

$$v = v_0 \mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) = v_0 \text{erfc}(\sqrt{U_c}) \quad (4.5)$$

$$\text{avec} \quad v_0 = \frac{\lambda}{\theta_0} \quad \text{et} \quad U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T}$$

Nous avons introduit une vitesse caractéristique  $v_0 = \frac{\lambda}{\theta_0}$  qui correspond au rapport de l'échelle de longueur discrète  $\lambda$  (taille du réseau) et d'un temps caractéristique  $\theta_0$  (inverse d'une fréquence de vibration). Dans un solide cristallin, on a  $\lambda = 1 \text{\AA}$  et  $\theta_0 = 10^{-13} \text{s}$ , soit  $v_0 = \frac{\lambda}{\theta_0} = 10^3 \text{m.s}^{-1}$ . Cette vitesse caractéristique représente la vitesse de la fissure lorsque la condition d'avancement est réalisée à tout instant ( $\mathcal{P} = 1$ ).

Nous supposons que les fluctuations de température  $k_B T$  sont petites telles que  $k_B T \ll \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y}$ , soit  $U_c \gg 1$ . Nous pouvons alors effectuer un développement asymptotique de la fonction  $\text{erfc}(\sqrt{U_c})$  et reformuler l'équation 4.5 avec le facteur d'intensité des contraintes  $K$  (tel que  $\sigma_m = K/\sqrt{\lambda}$ ) :

$$v = \frac{dL}{dt} = v_0 \frac{\exp(-U_c)}{\sqrt{\pi U_c}} = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{(K_C-K)^2 V}{2Y k_B T \lambda}}}{\sqrt{\frac{(K_C-K)^2 V}{2Y k_B T \lambda}}} \quad (4.6)$$

Comme la contrainte à la pointe de la fissure est fonction de la longueur de fente  $L$ , l'équation 4.6 représente l'équation différentielle d'évolution de la fissure. La dépendance non-linéaire de  $K$  avec  $L$  oblige à de nouvelles approximations pour résoudre cette équation et obtenir une expression analytique simple comme solution. Les diverses approximations et la résolution de l'équation différentielle seront détaillées en Annexe A.

Dans un premier temps, nous introduisons une longueur de fissure réduite  $\phi \equiv \frac{L-L_i}{L_C-L_i}$  pour mesurer l'évolution de la fente, qui croît depuis sa longueur initiale ( $\phi = 0$ ) jusqu'à sa valeur critique ( $\phi = 1$ ) lorsque la rupture est brutale. Le facteur d'intensité de contrainte s'écrit alors, en ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $\phi$  :

$$K \simeq \sigma \sqrt{L} = \sigma \sqrt{L_i + (L_C - L_i)\phi} \simeq K_i \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_C}{L_i} - 1 \right) \phi \right] \quad (4.7)$$

Cette approximation est raisonnable puisqu'elle n'entraîne qu'une erreur de 2% sur  $K$  tant que  $2\phi < 1$  et  $L_C < 2L_i$ . Ensuite, en remplaçant  $K$  par  $K_i$  dans le pré-facteur de l'exponentielle, l'erreur commise est d'ordre logarithmique conduisant alors à une légère sous-estimation de la vitesse de la fissure.

Grâce aux diverses approximations réalisées, nous obtenons une équation différentielle de la variable longueur réduite,  $\phi$ , que nous pouvons résoudre très facilement (voir Annexe A).

La solution de cette équation différentielle A.5 décrit la croissance de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$  :

$$t = \tau \left[ 1 - \exp \left( -\frac{L-L_i}{\zeta} \right) \right] \quad (4.8)$$

où  $\tau$  représente le temps de vie de l'échantillon :

$$\tau = \tau_0 \exp \left[ \frac{(\sigma_c - \sigma_i)^2 V}{2Y k_B T} \right] \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{v_0} \sqrt{\frac{Y k_B T}{V}} \frac{L_i}{\sigma_i} \quad (4.9)$$

et  $\zeta$  représente une longueur caractéristique de croissance :

$$\zeta = \frac{2Yk_BT}{V} \frac{L_i}{\sigma_i(\sigma_c - \sigma_i)} \quad (4.10)$$

#### Commentaires

- L'évolution de la fissure, depuis la longueur de fente  $L_i$  jusqu'à la longueur critique  $L_C$ , décrit une approche exponentielle du temps de rupture  $\tau$  avec une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ .
- Le temps de vie  $\tau$  (éq. (4.9)) augmente exponentiellement avec l'écart  $(\sigma_c - \sigma_i)^2$  au seuil de rupture  $\sigma_c$ . En effet, le temps de vie  $\tau$  obéit à une loi d'Arrhénius  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$  avec une barrière d'énergie  $\Delta U \propto (\sigma_c - \sigma_i)^2$ . Cette barrière d'énergie est fonction uniquement des contraintes à la pointe du défaut critique  $\sigma_c$  et initial  $\sigma_i$ , ne dépendant pas explicitement de la longueur de fente initiale. Dans une configuration différente, Marder [61] prédit un résultat voisin pour la barrière d'énergie.
- La longueur caractéristique du processus d'endommagement  $\zeta$  croît linéairement avec la température  $T$  et l'inverse du carré de la contrainte appliquée  $\sigma$ . En effet, on peut écrire  $\zeta \simeq \frac{2Y\lambda}{V\sqrt{\frac{L_C}{L_i}-1}} \frac{k_B T}{\sigma^2}$ .
- Lorsque la contrainte à la pointe du défaut initial  $\sigma_i$  est proche du seuil de rupture  $\sigma_c$ , on constate (éq. (4.10)) que cette longueur caractéristique  $\zeta$  diverge comme  $(\sigma_c - \sigma_i)^{-1}$ , ce qui ressemble au comportement observé pour la taille moyenne des sauts (chapitre 3 paragraphe 3.3.2).
- La vitesse de la fissure :  $\frac{dL}{dt} = \frac{\zeta}{(\tau-t)}$ , diverge à l'approche du temps de vie  $\tau$ , où on s'attend à une transition vers un régime dynamique de propagation rapide. Le processus d'endommagement n'est plus alors un mécanisme thermiquement activé.

### 4.3 Modèle numérique : réseau 2d de ressorts

Pour tester les prédictions analytiques précédentes décrivant la croissance lente d'une fissure, et mettre à l'épreuve les différentes approximations réalisées, nous allons étudier une simulation numérique d'un réseau 2d de ressorts, modélisant un milieu élastique discret bidimensionnel.

### 4.3.1 Présentation du modèle numérique

La littérature offre un très grand nombre d'études numériques de la fracture basées sur l'analyse de réseaux de ressorts ou de fusibles (voir l'ouvrage [40] qui offre un recueil d'articles de référence sur ce type d'étude numérique).

#### Un modèle simple de déformation anti-plane

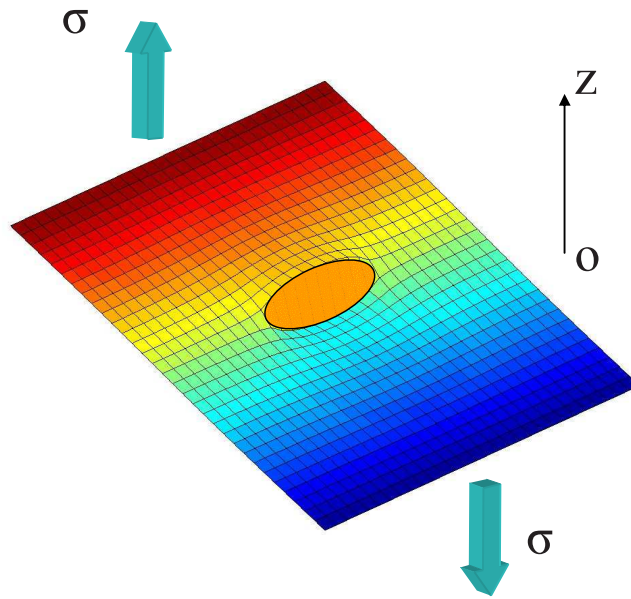


FIG. 4.3 – Représentation schématique du réseau  $2d$  de ressorts, soumis à l'effort tranchant  $\sigma$ , sur 2 bords opposés. Chaque lien représente un ressort. L'effort tranchant  $\sigma$  est parallèle à l'axe de déplacement des ressorts, et de direction opposée sur chaque bord. Au centre du réseau, les ressorts cassés forment une fissure, de direction parallèle aux bords contraints.

Nous examinons un modèle simple de déformation anti-plane<sup>1</sup>, représenté sur la figure 4.3. On considère un réseau carré de ressorts dont les noeuds peuvent se déplacer uniquement selon un axe perpendiculaire ( $Oz$ ) au plan des ressorts au repos. La force de rappel des ressorts est proportionnelle à la variation du déplacement  $u_z$  selon cet axe ( $Oz$ ) :  $f_{ij} = -\alpha(u_z^j - u_z^i)$ . Sur deux bords opposés du réseau, nous appliquons un effort tranchant constant

<sup>1</sup>On peut remarquer que dans le cas d'une déformation antiplane, l'analogie avec le problème électrique (réseau de fusibles où l'on injecte un courant aux bords) est exacte.



(parallèle à l'axe de déplacement des ressorts) et de direction opposée sur chaque bord.

Une fissure parallèle aux bords contraints est réalisée au centre du réseau en cassant une série de ressorts. La longueur de la fissure est donnée par le nombre de ressorts cassés. La forme carré du réseau ( $100 \times 100$  ressorts) est choisie pour réduire les effets de taille finie et obtenir une dépendance correcte du facteur d'intensité de contrainte avec la contrainte appliquée  $\sigma$  et la longueur de la fissure  $L_f$ . La taille ( $100 \times 100$ ) est limitée par la capacité mémoire et le temps de calcul de l'ordinateur. Nous considérons un milieu homogène de sorte que le seuil critique de rupture à la pointe de la fissure est le même pour tous les ressorts  $f_c = 1$ .

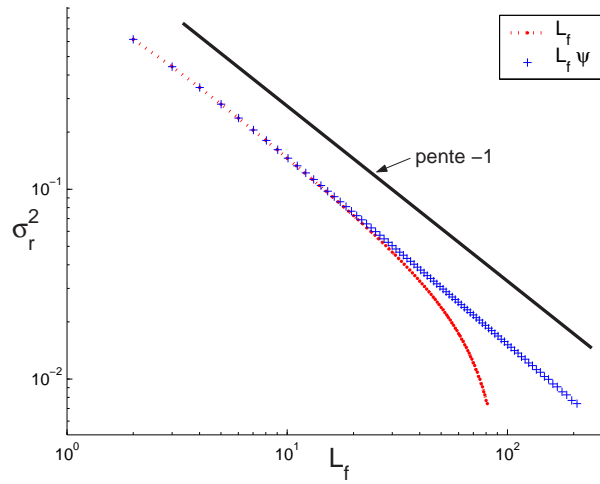


FIG. 4.4 – Force critique de rupture du réseau de ressort, au carré  $\sigma_r^2$ , en fonction de la longueur de la fissure  $L_f$ . Les effets de taille finie sont pris en compte (symboles +), grâce au facteur de correction géométrique  $\psi$ .

Nous examinons sur la figure 4.4, la force critique de rupture du réseau de ressorts  $\sigma_r$ , en fonction de la longueur de la fissure  $L_f$ . On trouve alors, que le carré de la contrainte critique de rupture  $\sigma_r^2$  est proportionnelle à la longueur de la fissure  $L_f$ , en considérant la correction géométrique due aux effets de taille finie présentée au chapitre précédent [11, 12]. La figure 4.4 révèle effectivement l'importance de cette correction. Le comportement observé est en bon accord avec les résultats expérimentaux présentés dans le chapitre précédent et la prédiction de Griffith telle que  $L_G \propto \frac{1}{\sigma^2}$ . De plus, le seuil de rupture du réseau de ressorts correspondant au facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ , vérifie bien  $K_C = \sigma_r \sqrt{L_f \psi}$ .

### Fluctuations de force gaussiennes

A partir d'une configuration d'équilibre, nous ajoutons, en parallèle, sur chaque ressort une force de distribution statistique gaussienne de moyenne nulle. Nous déterminons alors un nouvel état d'équilibre statique qui donne les nouvelles forces élastiques de chaque ressort. Ainsi, nous obtenons des fluctuations de force couplées de façon quasi-statique avec un thermostat, de la forme  $e^{-\frac{(f-\langle f \rangle)^2}{2\alpha k_B T}}$ . En choisissant la constante élastique des ressorts  $\alpha = 1$ , le coefficient de température  $k_B T$  correspond exactement à la variance des fluctuations de force.

#### *Remarques :*

Pour simuler un système en équilibre à une température  $T$ , on pourrait utiliser des méthodes de dynamiques moléculaires, mais celles-ci sont très lourdes. Pour cette raison, ici nous utilisons plutôt une méthode "quasi-statique".

### Processus de rupture irréversible

Lorsque la force sur un ressort dépasse une valeur seuil de rupture  $f_c$ , le ressort est coupé. Nous considérons un réseau de ressorts homogène, chaque ressort ayant le même seuil de rupture  $f_c = 1$ . Nous imposons un processus de rupture irréversible, en ne réparant jamais un ressort cassé.

L'échelle de temps correspond à une réalisation du bruit dans tout le réseau et l'échelle de longueur est la distance entre deux noeuds du réseau.

Dans ce réseau de ressorts soumis à un effort tranchant  $\sigma$  constant, nous pouvons alors examiner la croissance d'une fissure pré-existante de longueur  $L_i$ , due aux fluctuations de contraintes locales.

#### 4.3.2 Croissance de la fissure

##### Dynamique d'avancement par sauts

Dans un premier temps, nous examinons la dynamique complète de croissance de la fissure. La figure 4.5 représente l'évolution temporelle d'une fissure de longueur initiale  $L_i = 10$ , et de longueur critique  $L_c = 23$ .

Nous pouvons être frappé par la ressemblance de cette courbe d'évolution avec celles obtenues lors de nos expériences de fluage sur des échantillons de papier. On remarque effectivement que la croissance du défaut est intermittente, irrégulière : la fissure reste piégée pendant des temps d'attente  $t_w$  et puis soudainement, en cassant un ressort à la pointe, elle avance en réalisant un saut de longueur, correspondant à 1 ou 2 pas du réseau  $\lambda$ .

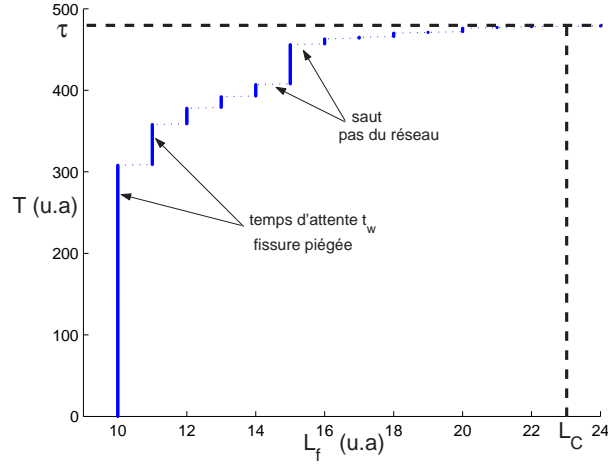


FIG. 4.5 – Evolution temporelle d’une fissure de longueur initiale  $L_i = 10$  jusqu’à la longueur critique de rupture  $L_c = 23$ , dans le réseau de ressorts  $100 \times 100$ , soumis à un effort tranchant  $\sigma = 0.250$ . Le bruit thermique  $k_B T$  correspondant à la variance des fluctuations de force est  $k_B T = 0.028$ .

Nous observons ici que le défaut avance en ne cassant qu’un ou deux liens à la fois, alors que dans nos expériences de fluage nous avons mis en évidence une distribution de tailles de sauts durant le processus de rupture. Cette différence est probablement due à la taille du réseau de ressorts  $100 \times 100$ , qui n’est pas suffisante pour espérer observer toute une distribution. Augmenter la taille du réseau, ce qui revient à réduire notre échelle de discrétisation, nous permettrait peut être d’avoir une plus grande dynamique, mais augmente considérablement le temps de calcul !

### Distribution des temps de vie

Comme nous avons pu l’observer expérimentalement, la dispersion sur les courbes de croissance et les temps de rupture obtenus pour différentes simulations avec contrainte appliquée  $\sigma$ , température  $k_B T$  et longueur de fente initiale  $L_i$  identiques, est très importante. La figure 4.6 permet de visualiser cette forte dispersion.

Les figures 4.7 montrent la distribution des temps de rupture de nos échantillons numériques, pour un effort tranchant constant  $\sigma = 0.2846$  et un bruit thermique  $k_B T = 6 \cdot 10^{-4}$ . Cette distribution est obtenue à partir de 800 réalisations.

Ces figures montrent que les temps de vie de nos échantillons numériques

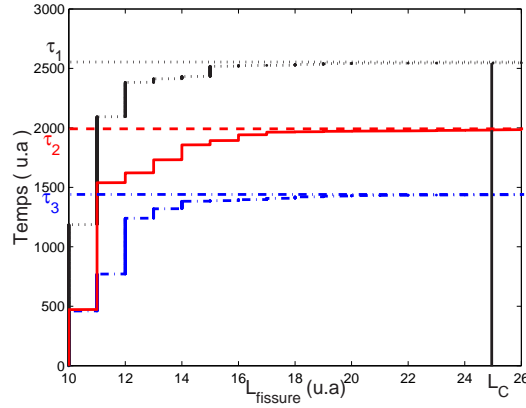


FIG. 4.6 – Evolution temporelle d'une fissure pour 3 "expériences numériques" réalisées dans les mêmes conditions : réseau de ressorts  $100 \times 100$ , soumis à un effort tranchant  $\sigma = 0.250$ , avec longueur initiale  $L_i = 10$  et longueur critique de rupture  $L_c = 25$ . Le bruit thermique  $k_B T$  correspondant à la variance des fluctuations de force est  $k_B T = 0.028$ .

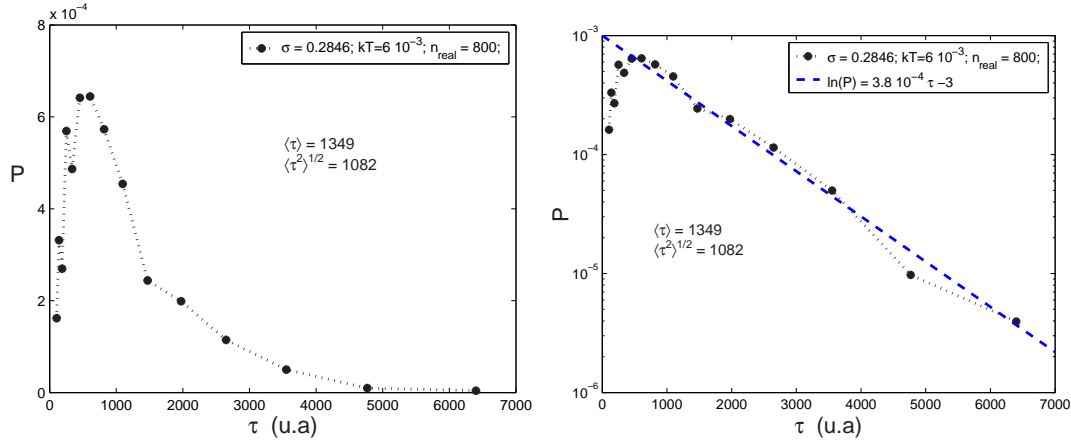


FIG. 4.7 – A gauche : Distribution des temps de vie pour 800 simulations à  $\sigma = 0.2846$ , avec un bruit thermique  $k_B T = 6 \cdot 10^{-4}$  et  $L_i = 10$ . A droite : même distribution en représentation semi-logarithmique. La droite en pointillés représente la courbe d'équation :  $\ln(P) = -3.8 \cdot 10^{-4} \tau + 2.85$ .

sont très largement distribués :  $\frac{\langle \tau^2 \rangle^{1/2}}{\langle \tau \rangle} \sim 0.8$ . De plus, la représentation semi-logarithmique de droite 4.7 met en évidence que la distribution des temps de rupture comporte une queue exponentielle.

Nous représentons sur les figures 4.8 les distributions des temps de rup-

ture normalisées par le temps de rupture moyen, pour différentes contraintes appliquées  $\sigma$  et différentes températures  $k_B T$ . Ces distributions sont obtenues à partir d'un ensemble de 500 à 800 réalisations.

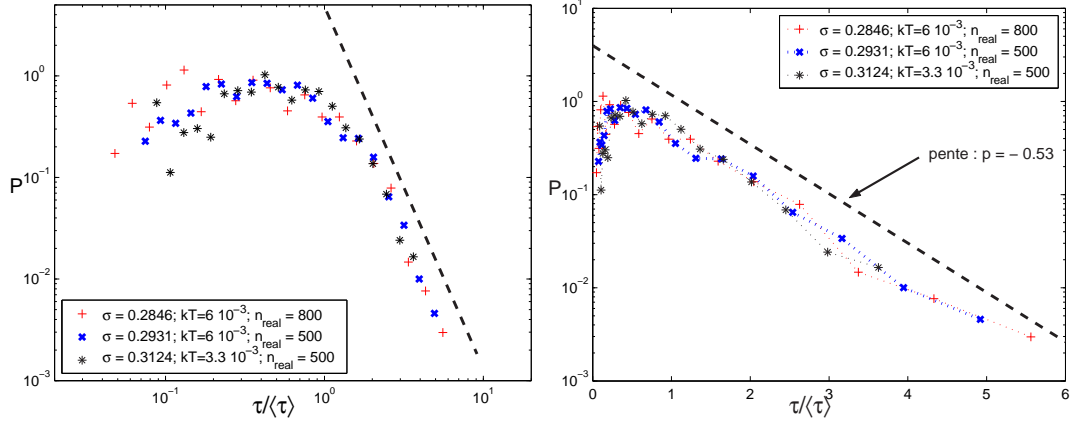


FIG. 4.8 – A gauche : Distribution des temps de vie  $\tau$  normalisés par le temps de rupture moyen  $\langle \tau \rangle$  pour différentes charges appliquées et températures. A droite : Mêmes distributions en représentation semi-logarithmique, afin de mettre en évidence la queue exponentielle des distributions de temps de rupture.

Nous observons que les distributions des temps de rupture normalisées par le temps de rupture moyen,  $\frac{\tau}{\langle \tau \rangle}$  se regroupent de façon remarquable sur une seule et même courbe. De plus, la représentation semi-logarithmique met encore en évidence une queue exponentielle.

Nous avons donc montré que dans un réseau de ressorts soumis à une charge constante, une fissure pré-existante grandit par sauts sous l'effet des fluctuations de contraintes locales. Les temps de rupture des échantillons sont très largement distribués. Ces résultats ressemblent fortement aux résultats obtenus lors des expériences de fluage présentées au chapitre précédent. Nous allons donc adopter le même type d'approche et effectuer une analyse statistique pour décrire la dynamique moyenne d'avancement de la fissure dans nos réseaux de ressorts.

#### Commentaires :

Ces résultats numériques sont comparables à ceux expérimentaux obtenus pour les distributions des temps d'attente. Dans nos échantillons numériques, le temps de vie dans un piège est déterminé par une loi d'Arrhénius  $\tau_p \propto e^{\Delta U/k_B T}$ . Pour casser l'échantillon, la fissure doit franchir un ensemble de pièges, ainsi le temps de rupture apparaît comme une somme d'exponentielles avec des poids différents (la barrière d'énergie  $\Delta U$  diminue). On observe alors (voir les figures ?? et 4.8) une distribution de temps de rupture

avec une forme singulière qui n'est pas une simple poissonnienne. Ce commentaire peut s'appliquer également aux distributions des temps d'attente mesurées expérimentalement. En effet, lors de notre analyse, nous déterminions les temps d'attente sur un intervalle de  $K$  donné. Or, la largeur de l'intervalle peut être importante, de sorte qu'on moyenne sur des temps d'attente très différents. On remarque qu'effectivement les formes des distributions se ressemblent fortement (notamment "la curieuse" remise à l'échelle avec le temps de vie moyen).

### Dynamique d'avancement moyenne

Pour cela, nous déterminons le temps moyen  $t$  pour que la fente atteigne une certaine longueur  $L$ . La figure 4.9 représente le temps moyen en fonction de la longueur de fente obtenu en réalisant la moyenne sur 30 réalisations dans les mêmes conditions de chargement  $\sigma = 0.1872$  avec un bruit thermique  $k_B T = 2 \cdot 10^{-2}$  et une longueur de fente initiale  $L_i = 16$ . Cette figure montre une approche exponentielle du temps de rupture moyen  $\tau$ , en très bon accord avec notre prédiction du paragraphe 4.2.2 (voir éq.4.8). Nous pouvons alors mesurer la longueur caractéristique  $\zeta$ , en réalisant un ajustement des données avec cette longueur caractéristique comme seul paramètre libre. Nous obtenons ici  $\zeta = 1.7$ .

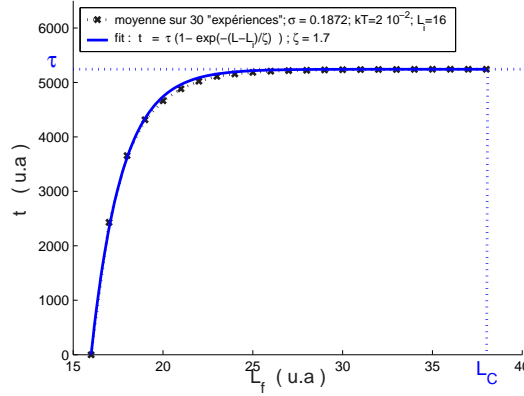


FIG. 4.9 – Evolution temporelle moyenne d'une fissure, pour 30 réalisations dans les mêmes conditions : réseau de ressorts  $100 \times 100$ , soumis à un effort tranchant  $\sigma = 0.1872$ , avec longueur initiale  $L_i = 16$  et longueur critique de rupture  $L_c = 38$ . Le bruit thermique  $k_B T$  correspondant à la variance des fluctuations de force est  $k_B T = 0.02$ .

Nous réalisons la même procédure pour différentes expériences numé-

riques de fluages sur notre réseau de ressorts. Nous avons réalisé un ensemble de 10 à 50 simulations pour des échantillons de longueurs de fente initiale  $L_i$  et de températures  $k_B T$  différentes.

La figure 4.10 montre alors le temps moyen  $t$  normalisé par le temps de rupture moyen  $\tau$  en fonction de la longueur de fissure normalisée  $\frac{L-L_i}{\zeta}$ , pour une gamme représentative des simulations réalisées à différentes charges  $\sigma$ , températures  $k_B T$  et longueurs de fente initiale  $L_i$ . La longueur caractéristique  $\zeta$  est obtenue comme précédemment en réalisant un ajustement des données ( $\zeta$  étant le seul paramètre libre) à charge  $\sigma$ , température  $k_B T$  et longueurs de fente initiale  $L_i$  fixées.

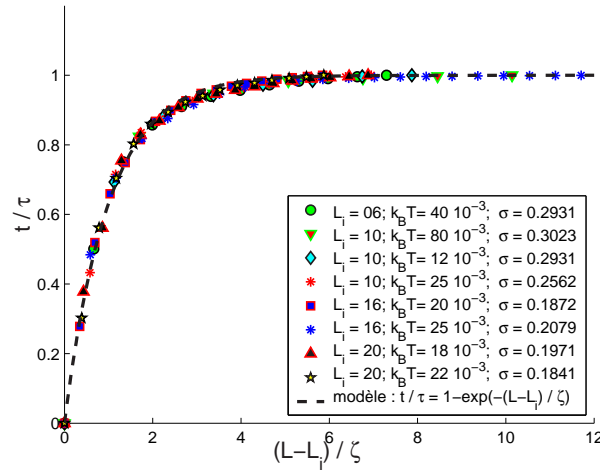


FIG. 4.10 – Temps moyen  $t$  normalisé par le temps de rupture moyen  $\tau$  en fonction de la longueur de fissure normalisée  $\frac{L-L_i}{\zeta}$  pour différentes valeurs de  $L_i$ ,  $\sigma$  et  $kT$ . L'unique paramètre ajustable est  $\zeta$ . La ligne pleine correspond à la prédiction établie précédemment (éq. 4.8).

La figure 4.10 met donc en évidence que les prédictions analytiques établies précédemment, décrivant la croissance lente d'une fissure comme un processus d'activation thermique où les fluctuations de contraintes permettent de franchir un seuil de rupture par sauts irréversibles, sont en excellent accord statistique avec les résultats issus d'une simulation numérique d'un réseau de ressorts. Ce modèle permet effectivement de bien décrire la dynamique de rupture de nos échantillons numériques.

L'examen de la dynamique complète nous permet également d'étudier la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  qui apparaît dans notre modèle.

### Longueur de croissance caractéristique $\zeta$

Nous rappelons que ce modèle décrit l'évolution de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique de rupture  $L_c$  selon une approche exponentielle du temps de rupture  $\tau$  avec une longueur caractéristique de croissance :

$$\zeta_{modele} = \frac{2Yk_BT}{V} \frac{L_i}{\sigma_i(\sigma_c - \sigma_i)} = \frac{2Yk_BT\lambda}{V} \frac{L_i}{K_i(K_c - K_i)}$$

Nous allons examiner la dépendance de cette longueur caractéristique  $\zeta$  en fonction de la température  $k_BT$ .

Nous introduisons la longueur caractéristique normalisée, telle que :

$$\zeta_{norm} = \frac{\zeta}{\frac{2Y\lambda}{V} \frac{L_i}{K_i(K_c - K_i)}}$$

Nous représentons sur la figure 4.10, ce paramètre  $\zeta_{norm}$ , en fonction de la température  $k_BT$ , pour les différentes simulations réalisées.

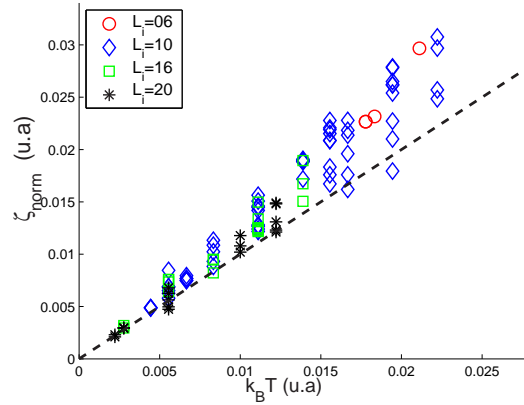


FIG. 4.11 – Longueur caractéristique de croissance  $\zeta_{norm}$  en fonction de la température  $k_BT$ , pour différentes longueurs de fente initiale  $L_i$  et charges appliquées  $\sigma$ . La droite en traits pointillés correspond à la prédiction du modèle

La dépendance linéaire de la longueur caractéristique  $\zeta$  avec la température  $k_BT$  comme prédit par l'équation 4.10 apparaît clairement pour toute une gamme de longueurs de fente initiale  $L_i$  et de contraintes appliquées  $\sigma$ . On remarque sur la figure 4.11, que la dispersion des résultats, à température et longueur de fente initiale fixées, apparaît systématiquement au dessus de la prédiction de notre modèle. Les approximations réalisées sous-estiment



effectivement la vitesse de la fissure, provoquant de même une augmentation de la dispersion des données lorsque la longueur critique  $L_C$  grandit.

Nous comparons directement sur la figure 4.12, la longueur caractéristique prédite par notre modèle  $\zeta_{modele} = \frac{2Yk_BT\lambda}{V} \frac{L_i}{K_i(K_c - K_i)}$ , à la longueur caractéristique mesurée à partir des ajustements des différentes courbes de croissance moyenne  $\zeta$ .

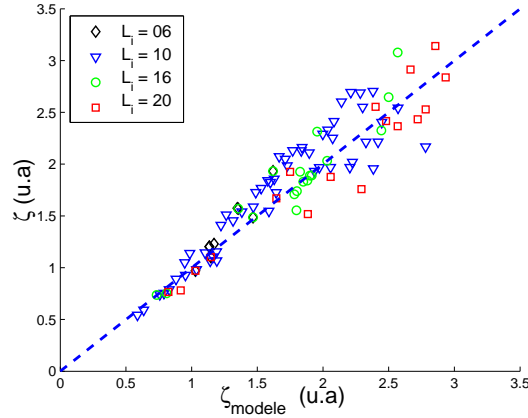


FIG. 4.12 – Longueur caractéristique de croissance mesurée  $\zeta$  en fonction de la longueur caractéristique de croissance prédite  $\zeta_{modele}$  pour différentes longueurs de fente initiale  $L_i$  et charges appliquées  $\sigma$ . La droite en traits pointillés représente la courbe  $y = x$ .

La figure 4.12 montre que la prédiction de notre modèle est très satisfaisante pour un ensemble d'expériences réalisées dans différentes conditions. On observe que la dispersion augmente avec la longueur caractéristique. Il faut remarquer que nous prenons en compte ici la correction géométrique  $\psi$  pour estimer la contrainte initiale à la pointe de la fissure  $K_i$  et le seuil de rupture  $K_c$ .

### Temps de rupture $\tau$

Ensuite, nous pouvons examiner l'autre paramètre important de notre modèle, le temps de vie  $\tau$ . Nous avons déjà remarqué que la distribution des temps de rupture obtenues dans les simulations a une queue exponentielle décroissante avec une largeur importante  $\sqrt{\langle \Delta \tau^2 \rangle} / \tau \approx 0.8$ . L'approche statistique est donc nécessaire, pour mettre à l'épreuve la prédiction des temps de rupture :

$$\tau = \tau_0 \exp \left[ \frac{(\sigma_c - \sigma_i)^2 V}{2Yk_BT} \right] = \tau_0 \exp \left[ \frac{(K_c - K_i)^2 V}{2Yk_BT\lambda} \right] \quad (4.11)$$

$$\text{avec} \quad \tau_0 = \frac{2\pi}{v_0} \sqrt{\frac{Y k_B T}{V}} \frac{L_i}{\sigma_i} = \frac{2\pi}{v_0} \sqrt{\frac{Y k_B T \lambda}{V}} \frac{L_i}{K_i}$$

Ainsi, nous examinons les temps de vie moyennés sur un ensemble de 10 à 50 simulations pour des échantillons de longueurs de fente initiale et de températures différentes. La figure 4.13 montre le logarithme de  $\tau/\tau_0$  en fonction de la barrière d'énergie rappelée par l'équation 4.11  $\Delta U_{\text{modele}} = \frac{(K_c - K_i)^2 V}{2Y\lambda}$ , divisée par la température  $k_B T$ . (Dans la simulation numérique  $\lambda = 1$  et  $V = 1$ ).

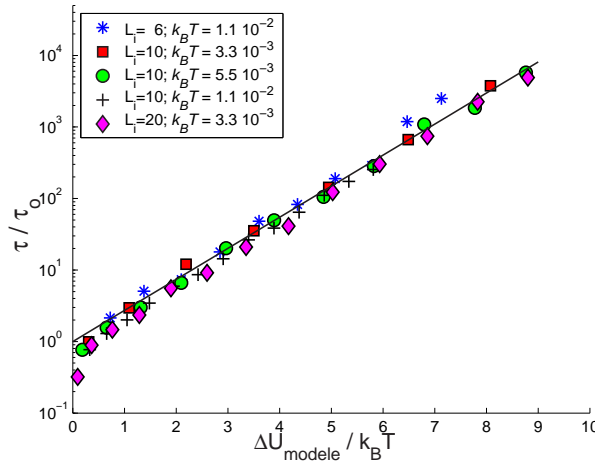


FIG. 4.13 – Logarithme du temps de vie normalisé  $\frac{\tau}{\tau_0}$  en fonction du rapport de la barrière d'énergie  $\Delta U_{\text{modele}} \propto (K_c - K_i)^2$  et de la température  $k_B T$ . La ligne pleine, pente 1, est la prédiction de l'équation 4.11. La mise à l'échelle est correcte pour une gamme de température et de longueur de fissure initiale.

La prédiction de ce modèle apparaît excellente quelles que soient la longueur de fente initiale et la température.

Nous pouvons également comparer les temps de rupture  $\tau$  à la prédiction établie à partir de la barrière d'énergie de Griffith  $\Delta U_G$  :  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U_G}{k_B T}}$  [43, 44, 45]. Nous rappelons la forme de cette barrière d'énergie présentée au chapitre introductif 1 :

$$\Delta U_G \propto L_i \left( \frac{K_i}{K_c} - \frac{K_c}{K_i} \right)^2$$

La figure 4.14 montre le logarithme de  $\tau$  en fonction de la barrière d'énergie de Griffith  $\Delta U_G$  divisée par la température  $k_B T$ , pour différentes longueurs de fente initiale  $L_i$  et température  $k_B T$ .

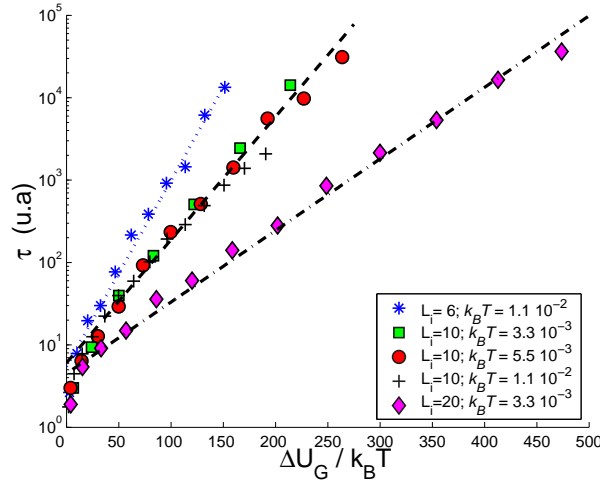


FIG. 4.14 – Logarithme du temps de vie  $\tau$  en fonction de la barrière d'énergie de Griffith  $\Delta U_G$  divisée par la température  $k_B T$ . La mise à l'échelle des données pour différentes longueurs de fissure initiale est mauvaise. Les droites servent de guide pour les yeux.

On observe que pour une longueur de fente initiale donnée, la remise à l'échelle en fonction de la température est correcte. Cependant, cette approche ne fonctionne plus, lorsque la longueur de fente initiale varie. L'approche utilisant la barrière d'énergie de Griffith  $\Delta U_G$  ne permet pas de prédire le temps de rupture de nos échantillons. On peut remarquer que cette barrière d'énergie  $\Delta U_G$  est une fonction linéaire de la longueur de fente initiale multipliée par une fonction ne dépendant que des facteurs d'intensité des contraintes, alors que la barrière d'énergie prédite par notre modèle de *croissance irréversible*, ne dépend que des facteurs d'intensité des contraintes. Le choix d'utiliser la barrière d'énergie de Griffith suppose que la fissure peut explorer des états réversibles de longueurs de fente comprises entre  $L_i$  et  $L_c = L_G$ , ce qui ne semble pas correct si la fissure croît de manière irréversible. En fait, l'hypothèse d'irréversibilité du processus de rupture apparaît essentielle pour prédire les temps de vie de nos échantillons. En effet, nous pouvons montrer que l'irréversibilité du processus de rupture conduit naturellement à une dépendance de la barrière d'énergie uniquement en fonction du facteur d'intensité des contraintes. Par exemple, à partir du potentiel de Griffith, on pourrait imaginer un processus de croissance irréversible par pas  $\delta$ , comme représenté sur la figure 4.3.2, avec une barrière d'énergie à franchir à chaque pas, proportionnelle à la dérivée de cette énergie potentielle de Griffith :  $\delta U_G^{irr} = \frac{dU}{dL} \delta \propto (K_c^2 - K^2) \delta$ .

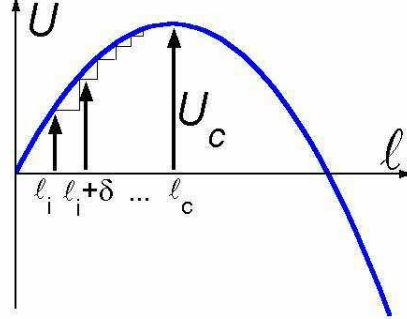


FIG. 4.15 – Escalade irréversible de la barrière d'énergie de Griffith.

On peut obtenir alors le temps de rupture  $\tau$ , en intégrant le temps nécessaire pour que la fissure avance depuis sa longueur initiale  $\ell_i$  jusqu'à la longueur critique  $\ell_c$ , dans la limite où les pas  $\delta \ll \ell_i$  :  $\tau \propto e^{\frac{(K_c^2 - K_i^2)\delta}{Yk_B T}}$ . On remarque donc que cette barrière d'énergie ne dépend plus explicitement de la longueur de fente initiale. Cependant, la dépendance en fonction des facteurs d'intensité des contraintes n'est alors pas correcte. Sur la figure 4.16, nous montrons en insert, que cette approche ne permet effectivement pas de prédire le temps de rupture de nos échantillons numériques, alors que pour les mêmes paramètres  $L_i$  et  $k_B T$ , notre modèle de croissance lente irréversible décrit au paragraphe 4.2 offre une excellente remise à l'échelle des temps de rupture. Nous verrons qu'une des raisons vient du fait de l'existence d'états métastables pour des longueurs de fissure  $L_f > L_G$  dans nos simulations numériques.

La figure en insert 4.16 montre que la remise à l'échelle des données, pour une longueur de fente initiale fixée pour différentes températures est mauvaise.

Ainsi, notre mécanisme de croissance lente et irréversible d'une fissure selon un processus d'activation où les fluctuations statistiques de contraintes permettent de franchir un seuil de rupture par sauts irréversibles, décrit donc de façon remarquable la dynamique moyenne de rupture de nos échantillons numériques et les divers paramètres la caractérisant, le temps de rupture  $\tau$ , et la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$ . De plus, les travaux antérieurs utilisant la barrière d'énergie de Griffith pour prédire un temps de rupture [43, 44, 45] ne réussissent pas à prendre en compte le caractère irréversible du processus de rupture, et donc ne décrivent pas nos résultats numériques.

Nous allons maintenant mettre à l'épreuve ces prédictions analytiques en

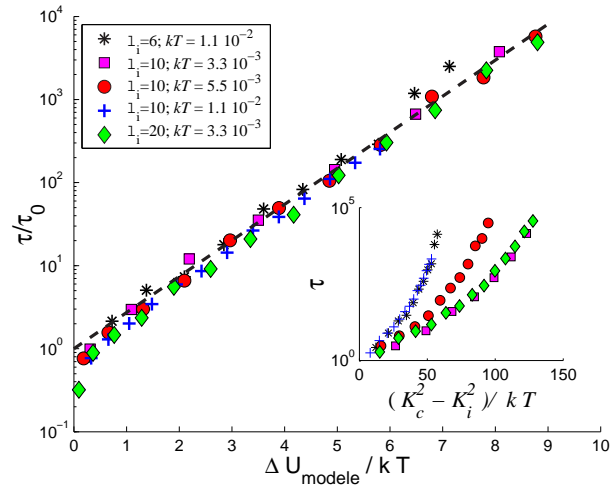


FIG. 4.16 – Logarithme du temps de vie normalisé  $\frac{\tau}{\tau_0}$  en fonction du rapport de la barrière d'énergie  $\delta U_{\text{modele}} \propto (K_c - K_i)^2$  et de la température  $kT$ . La ligne pleine, pente 1, est la prédiction de l'équation 4.9. En insert, logarithme du temps de vie  $\tau$  en fonction de la barrière d'énergie  $\delta U_G^{irr} \propto (K_c^2 - K_i^2)\delta$  divisée par la température  $k_B T$ . La mise à l'échelle des données pour différentes températures pour une longueur de fente initiale fixée, est mauvaise.

les confrontant aux résultats expérimentaux.

## 4.4 Comparaison aux résultats expérimentaux

### Croissance moyenne du défaut

Nous avons déjà pu remarquer au chapitre précédent, où nous présentions les résultats expérimentaux, que la dynamique de croissance moyenne du défaut depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_c$  était bien décrite par une loi exponentielle déterminée par 2 paramètres le temps de rupture  $\tau$  et une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ . Cette approche exponentielle du temps de rupture correspond exactement à la prédiction de notre modèle, que nous avons pu également vérifier numériquement sur une simulation d'un réseau de ressorts.

Nous rappelons la méthode d'analyse adoptée et les résultats présentés au chapitre précédent. Pour chaque ensemble d'expériences réalisées à paramètres expérimentaux fixés, même longueur de fente initiale  $L_i$  et même force appliquée aux échantillons  $F$ , nous examinons le temps moyen  $\langle t \rangle$  pour que la fissure atteigne une longueur de fissure  $L$ . Chaque courbe est obtenue en moyennant sur un ensemble de 5 à 20 réalisations. Puis, nous déterminons pour chaque courbe de croissance moyenne, la longueur caractéristique de croissance  $\zeta$  en réalisant un ajustement des données :  $\frac{\langle t(L) \rangle}{\tau} = 1 - e^{-\frac{L-L_i}{\zeta}}$ . La longueur caractéristique de croissance  $\zeta$  étant l'unique paramètre de fit. Nous rappelons alors les résultats obtenus précédemment (voir chapitre 3 figure 3.10) en montrant à nouveau le temps d'évolution moyen  $\langle t \rangle$  normalisé par le temps de rupture moyen  $\tau$ , en fonction de la longueur de fissure normalisée par la longueur de croissance caractéristique,  $\frac{L-L_i}{\zeta}$ .

Notre mécanisme de croissance lente et irréversible par pas thermique-ment activés décrit de façon remarquable l'évolution moyenne de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à sa longueur critique de rupture  $L_C$ , où l'échantillon casse soudainement. En effet, la figure 4.17 montre une remise à l'échelle très satisfaisante, d'autant que nous avons vérifié que l'écart au comportement moyen prédit, décroît avec le nombre d'expériences réalisées.

Nous allons examiner maintenant les paramètres déterminant la dynamique moyenne d'avancement de la fissure : la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  et le temps de rupture  $\tau$ .

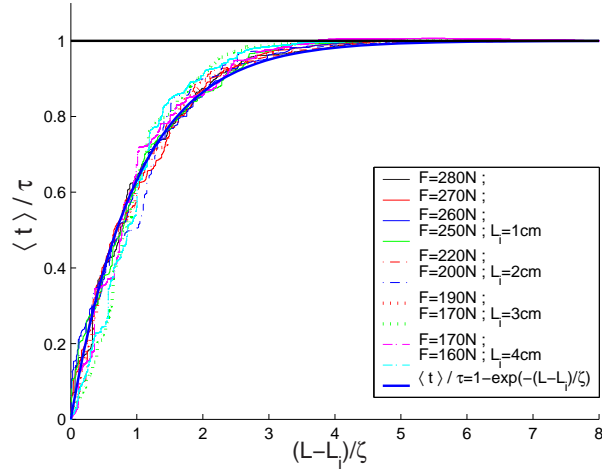


FIG. 4.17 – Temps d'évolution moyen  $\langle t \rangle$  normalisé par le temps de rupture moyen  $\tau$ , en fonction de la longueur de fissure  $L - L_i$ , normalisée par la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$ . La courbe en trait plein correspond à la prédiction de notre modèle :  $\frac{\langle t(L) \rangle}{\tau} = 1 - e^{-\frac{L-L_i}{\zeta}}$ .

#### 4.4.1 Longueur de croissance caractéristique $\zeta$

Nous avons déjà mis en évidence au chapitre précédent la dépendance de ce paramètre en fonction de la contrainte appliquée  $\sigma$ . Nous avons effectivement montré (voir figure 3.22) que la longueur de croissance caractéristique  $\zeta$  croît de manière quadratique avec l'inverse de la contrainte appliquée  $\sigma$ . Nous avons également remarqué que  $\zeta$  avait tendance à augmenter avec la longueur de fente initiale du défaut  $L_i$  (voir figure 3.20). Ces résultats semblent en bon accord avec la prédiction de notre modèle :

$$\zeta_{\text{modele}} = \frac{2Yk_BT}{V} \frac{L_i}{\sigma_i(\sigma_c - \sigma_i)}$$

Nous comparons alors directement, la longueur caractéristique prédite par notre modèle  $\zeta_{\text{modele}} = \frac{2Yk_BT}{V\sigma^2(\sqrt{\frac{L_c}{L_i}} - 1)}$ , à la longueur caractéristique mesurée à partir des ajustements des différentes courbes de croissance moyenne  $\zeta$ . Sur la figure 4.18, nous traçons la longueur caractéristique de croissance mesurée  $\zeta$  en fonction de la longueur caractéristique prédite  $\zeta_{\text{modele}}$  multipliée par le volume  $V$ . Cette échelle volumique  $V$  correspond à la taille à laquelle les fluctuations statistiques agissent pour déclencher un événement de rupture.

La figure 4.18 montre que la prédiction de notre modèle est satisfaisante pour un ensemble d'expériences réalisées dans différentes conditions. Nous

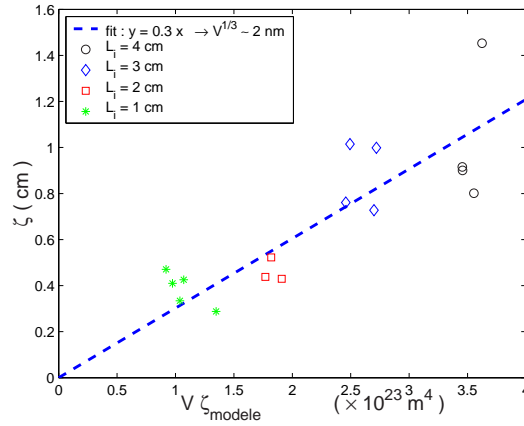


FIG. 4.18 – Longueur caractéristique de croissance mesurée dans la simulation numérique  $\zeta$  en fonction de la longueur caractéristique de croissance prédite  $\zeta_{\text{modele}}$  multipliée par le volume  $V$ . La droite en trait plein représente le meilleur fit linéaire  $y = 0.3x$ .

remarquons principalement la dépendance de cette longueur caractéristique  $\zeta$  en fonction de la longueur de fente initiale  $L_i$ , comme nous l'avons déjà remarquer précédemment. De plus, la pente de l'ajustement linéaire nous permet d'estimer l'échelle volumique  $V$  :  $V^{1/3} \simeq 2 \text{ nm}$ . (Nous calculons la contrainte à la pointe de la fissure à l'échelle discrète  $\lambda$  correspondant à la taille des fibres  $d_f = 20 \mu\text{m}$  en utilisant le facteur d'intensité des contraintes). On trouve donc que les fluctuations statistiques de contraintes agissent à l'échelle nanométrique ! Nous montrerons en analysant différentes observables comme le temps de rupture  $\tau$ , la distribution des tailles de saut ou encore, la taille moyenne des sauts durant le processus de rupture, que nous obtenons de manière très robuste toujours une échelle caractéristique des fluctuations de contraintes petite de l'ordre du nanomètre. Nous discuterons à la fin de ce chapitre la petitesse de ce volume.

#### 4.4.2 Temps de rupture $\tau$

Au chapitre précédent, nous avons mis en évidence l'importance du rôle de la température  $T$  dans le processus de fracturation lente de nos échantillons de papier. Nous avons montré que les temps de rupture semblaient suivre une loi d'Arrhénius avec une barrière d'énergie décroissant avec la contrainte appliquée  $\tau \propto e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$ . De plus, nous avons obtenu à partir d'une analyse phénoménologique des données expérimentales une barrière d'énergie  $\Delta U_\phi$



qui permettait une remise à l'échelle de l'ensemble des temps de rupture  $\tau$  assez satisfaisante.

Ces résultats apparaissent en bon accord avec la prédiction de notre modèle : en effet, ce modèle décrivant un mécanisme de croissance lente thermiquement activée prévoit (cf équation 4.11) que le temps de vie de nos échantillons  $\tau$  obéit à une loi d'Arrhénius  $\tau = \tau_0 e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$  avec une barrière d'énergie ne dépendant que de l'écart au seuil de rupture  $\Delta U = \frac{(\sigma_e - \sigma_i)^2 V}{2Y}$ . On peut tout de suite remarquer que cette barrière d'énergie est différente mais de forme similaire à celle obtenue par l'analyse des données expérimentales.

Nous estimons les contraintes à la pointe de la fissure grâce au facteur d'intensité des contraintes :  $\sigma = \frac{K}{\sqrt{\lambda}}$ . Nous pouvons alors représenter sur la figure 4.19 les temps de rupture  $\tau$  en fonction d'une quantité proportionnelle à la barrière d'énergie prédite par notre modèle  $\frac{\Delta U_{\text{modele}} V}{k_B T \lambda} = \frac{(K_C - K_i)^2}{2Y k_B T}$ .

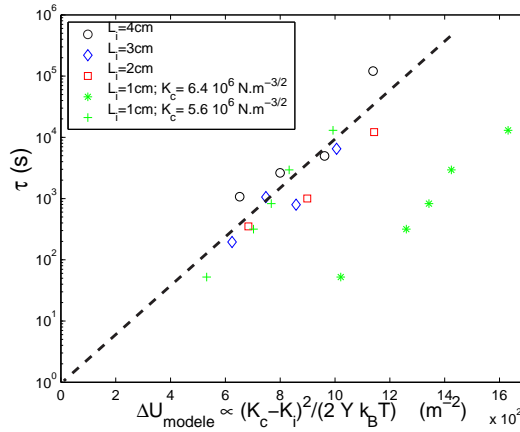


FIG. 4.19 – Temps de rupture  $\tau$  en fonction de la barrière d'énergie prédite par notre modèle  $\Delta U_{\text{modele}}$  divisée par la température  $k_B T$  et multipliée par le rapport du volume  $V$  sur l'échelle caractéristique  $\lambda$  :  $\frac{(K_C - K_i)^2}{2Y k_B T}$ . Les différents symboles correspondent aux expériences réalisées à différentes longueurs de fente initiale  $L_i$ . La droite en traits pointillés sert de guide pour les yeux.

Nous observons que pour les différentes expériences sur des échantillons comportant un défaut de longueur initiale 2, 3, et 4 cm, la remise à l'échelle des temps de rupture est satisfaisante. Par contre, pour les expériences réalisées à  $L_i = 1 \text{ cm}$ , on remarque un décalage comme pour les analyses expérimentales précédentes (voir chapitre 3 paragraphe 3.2.4). Cependant, comme le montre la figure suivante 4.20 la dispersion des données qui est de l'ordre de 10 à 15% est notablement réduite par rapport aux écarts obtenus, de l'ordre de 20%, en utilisant la barrière d'énergie phénoménologique  $\Delta U_\phi$ .

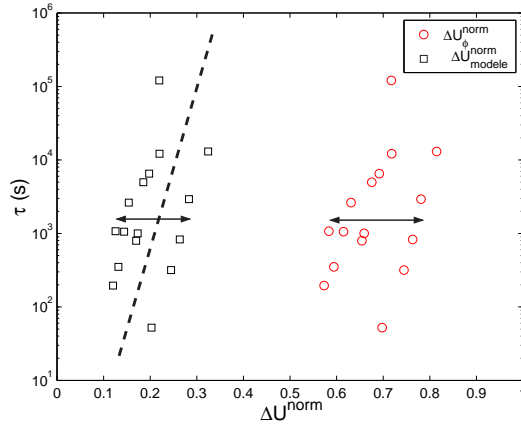


FIG. 4.20 – Temps de rupture  $\tau$  en fonction des barrières d'énergie normalisées. Les symboles ( $\square$ ) correspondent à la barrière d'énergie prédite par notre modèle, normalisée :  $\Delta U_{modele}^{norm} = (1 - \frac{K_i}{K_C})^2$ , et les symboles ( $\circ$ ) à la barrière d'énergie obtenue par une analyse phénoménologique réalisée au chapitre précédent, normalisée  $\Delta U_{\phi}^{norm} = 1 - \frac{K_i^2}{K_C^2}$ . Les flèches permettent de visualiser la dispersion. La droite en traits pointillés sert de guide pour les yeux.

Cependant, on peut s'interroger sur ce décalage systématique observé pour les expériences à  $L_i = 1cm$ . Une explication possible est que nous estimons mal la contrainte à la pointe du défaut. Au chapitre précédent 3 (voir figure 3.13), en analysant les longueurs critiques de rupture  $L_C$  en fonction de la contrainte appliquée  $\sigma$ , nous avons effectivement mis en évidence que la ténacité correspondant au seuil critique de rupture  $K_C$  semble être plus faible pour les expériences réalisées à  $L_i = 1cm$ .

La figure 4.21 montre les facteurs d'intensité des contraintes critiques estimés à partir de la valeur moyenne des longueurs critiques  $\langle L_C \rangle$ , en tenant compte des corrections géométriques, en fonction de la valeur moyenne des longueurs critiques  $\langle L_C \rangle$  (mesurées pour un ensemble d'expériences réalisées dans les mêmes conditions  $\{L_i, \sigma\}$ )

Si pour les différentes expériences réalisées à  $L_i = 2, 3$  et  $4 cm$ , le seuil de rupture  $K_C$  apparaît constant, on observe que ce facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$  chute pour les plus petites valeurs de longueurs critiques  $L_C$ , correspondant aux expériences de fluage avec une longueur de fente initiale  $L_i = 1cm$ .

Ainsi, en prenant comme seuil de rupture pour ces expériences à  $L_i = 1cm$ , la valeur moyenne des facteurs d'intensité des contraintes mesurées, soit  $K_C = \langle K_C(L_i = 1cm) \rangle = 5.6 \cdot 10^6 N.m^{-3/2}$ , on observe sur la figure

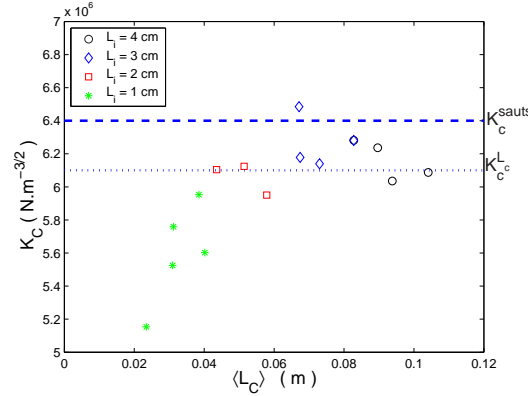


FIG. 4.21 – Facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$  en fonction de la longueur critique de rupture moyenne  $\langle L_C \rangle$ , pour l'ensemble des expériences réalisées. Les différents symboles correspondent à des expériences réalisées à différentes longueurs de fente initiale  $L_i$ . On a noté les valeurs du seuil de rupture que nous avons estimé de différentes manières au chapitre précédent, à partir de l'examen de la distribution des tailles de sauts  $K_C^{\text{sautes}} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-3/2}$  et à partir de l'analyse des longueurs critiques  $K_C^{LC} = 6.1 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-3/2}$ .

4.19 que la remise à l'échelle des temps de rupture est alors excellente pour l'ensemble des expériences réalisées.

### Echelle volumique des fluctuations statistiques

Nous pouvons remarquer en réalisant un ajustement des temps de vie du type  $\ln(\tau) = \alpha \frac{(K_C - K_i)^2}{2Yk_B T} + \beta$  que les pentes  $\alpha$  pour chaque série d'expériences réalisées à  $L_i$  fixé, sont très proches de l'ordre de  $\alpha \simeq 4 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$ . Nous pouvons alors estimer l'échelle caractéristique volumique  $V$ , qui correspond à l'échelle à laquelle les fluctuations statistiques agissent  $V = \alpha \lambda$  (avec  $\lambda = 20 \mu\text{m}$ ), pour déclencher la croissance de la fissure. On trouve alors comme à partir de l'analyse de la longueur de caractéristique  $\zeta$ , que les fluctuations statistiques de contraintes jouent un rôle à l'échelle nanométrique :  $V^{1/3} \sim 4 \text{ nm}$ .

### Pré-facteur $\tau_0$

Nous pouvons également à partir de l'ajustement des temps de vie du type  $\ln(\tau) = \alpha \frac{(K_C - K_i)^2}{2Yk_B T} + \beta$  examiner l'ordonnée à l'origine  $\beta$  qui nous donne

une mesure du pré-facteur  $\tau_0$ . Nous rappelons la prédiction de notre modèle :

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{\Delta U}{k_B T}} \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{2\pi}{v_0} \sqrt{\frac{Y k_B T \lambda}{V}} \frac{L_i}{K i}$$

Nous mesurons alors pour  $\tau_0$  un temps de l'ordre de  $1s$ , ce qui nous donne une vitesse caractéristique de l'ordre de  $v_0 \sim 10^{-3} m.s^{-1}$ . Nous rappelons sur la figure 4.22 la vitesse moyenne d'avancement en fonction de l'inverse de l'écart au seuil de rupture (résultat présenté au chapitre précédent 3 paragraphe 3.2.5).

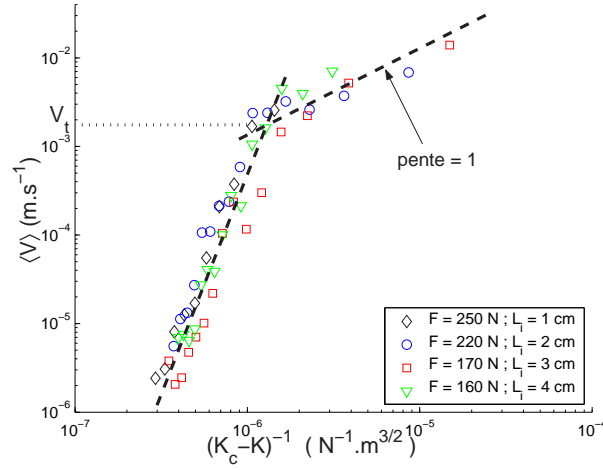


FIG. 4.22 – Vitesse moyenne d'avancement de la fissure  $\langle V \rangle$ , en fonction de l'inverse de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ , pour différentes expériences de fluage.

Cette valeur  $v_0 \sim 10^{-3} m.s^{-1}$  correspond à la valeur d'une vitesse de transition  $V_t$  entre les 2 régimes mis en évidence sur la figure. Nous obtiendrons au chapitre suivant une estimation de cette vitesse caractéristique d'une manière différente mais en très bon accord avec ce résultat<sup>2</sup>.

### Barrière d'énergie "à la Griffith"

On peut également examiner la prédiction des temps de rupture [43, 44, 45] utilisant la barrière d'énergie  $\Delta U_G$  établie à partir des considérations

<sup>2</sup>On peut se demander que représente cette valeur de  $v_0$ , et s'il y a un lien avec les propriétés rhéologiques du matériau.

énergétiques à la "Griffith". On rappelle la forme de cette barrière d'énergie que nous avons établie dans notre géométrie, au chapitre introductif 1 :

$$\Delta U_G = \gamma e_p L_i \left( \frac{K_i}{K_C} - \frac{K_C}{K_i} \right)^2$$

Sur la figure 4.23, on trace les temps de rupture  $\tau$  en fonction d'une grandeur proportionnelle à la barrière d'énergie  $\Delta U_G \propto L_i \left( \frac{K_i}{K_C} - \frac{K_C}{K_i} \right)^2$

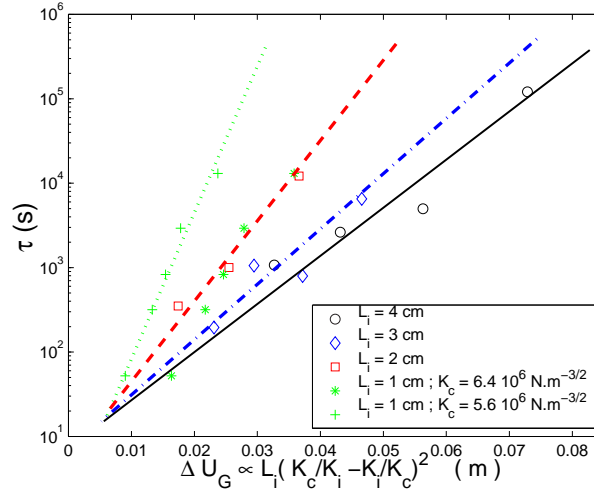


FIG. 4.23 – Temps de rupture  $\tau$  en fonction de la barrière d'énergie  $L_i \left( \frac{K_i}{K_C} - \frac{K_C}{K_i} \right)^2 \propto \Delta U_G$ . Les différents symboles correspondent aux expériences réalisées à différentes longueurs de fente initiale  $L_i$ . Les droites servent uniquement de guide pour les yeux.

Les temps de rupture semblent bien croître de manière exponentielle pour une série d'expériences réalisées à  $L_i$  fixé. Cependant, lorsqu'on change la taille du défaut initial, cette barrière d'énergie ne permet pas la remise à l'échelle des temps de rupture de nos échantillons. Nous pouvons observer un décalage systématique avec les différentes longueurs de fente initiale (si l'on corrige comme précédemment le seuil de rupture  $K_C$  pour les expériences réalisées à  $L_i = 1\text{cm}$ , en prenant le seuil de rupture local  $\langle K_C(L_i = 1\text{cm}) \rangle = 5.6 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-3/2}$ ), montrant que l'approche utilisant la barrière d'énergie de Griffith ne permet pas de prédire les temps de rupture de nos échantillons.

#### Commentaires

Avant de conclure, ce paragraphe puis le chapitre, nous devons discuter cet écart systématique observé sur les temps de rupture pour les expériences

à  $L_i = 1\text{cm}$ . Cet écart semble comme nous l'avons montré précédemment, dû à une mauvaise estimation de la contrainte à la pointe de la fissure et en particulier du seuil critique de rupture  $K_c$ <sup>3</sup>. Cette mauvaise estimation de la contrainte à la pointe du défaut peut avoir plusieurs origines :

- *Le flambage*

Nous avons observé que l'amplitude et la longueur d'onde du flambage dépendent de la longueur de la fissure. Or, si l'effet du flambage ne change pas énormément la répartition des efforts [62], les écart nécessaires pour expliquer la variation de  $K_c$  ne sont que de 10%.

- *La forme du défaut*

Le calcul d'Inglis [36] montre l'importance de la forme (via le rayon de courbure à la pointe de la fissure). Nous pouvons penser que la rugosité du front de fracture peut également modifier la contrainte à la pointe de la fissure, et cet effet doit être a priori plus important sur les fissure de petite taille.

Nous pouvons conclure ce paragraphe en remarquant que notre modèle de croissance lente thermiquement activée nous permet de décrire de façon remarquable la dynamique moyenne de rupture progressive de nos échantillons de papier, et prédire le comportement des paramètres  $\zeta$  longueur caractéristique de croissance et  $\tau$  temps de rupture déterminant cette dynamique moyenne de fracturation.

Nous montrons que les fluctuations statistiques de contraintes agissent à une échelle nanométrique, pour déclencher des événements de rupture qui seront à des tailles beaucoup plus importantes (échelle micrométrique correspondant à la taille des fibres). Il faut remarquer que dans notre approche théorique, les hétérogénéités du matériau apparaissent uniquement comme l'échelle de longueur de discrétisation mésoscopique du matériau considéré, soit la taille des fibres pour les feuilles de papier. Aussi, nous n'avons pas considéré l'effet du désordre notamment sur les propriétés du matériau. Or, des travaux récents [40, 41, 58] ont mis en évidence le rôle du désordre, qui réduit de manière effective la barrière d'énergie. Selon [58], le désordre amplifie le rôle de la température, permettant de définir une température effective  $T_{eff}$  beaucoup plus grande que la température thermodynamique  $T$ . De plus, des résultats préliminaires sur nos échantillons numériques où nous considérons du désordre sur les seuils de rupture des ressorts (en les distribuant aléatoirement) semblent en bon accord avec cette prédiction. Ainsi, l'effet du désordre

---

<sup>3</sup>Nous n'avons tenu compte d'une correction que sur le seuil de rupture  $K_c$ , il faudrait également examiner le facteur d'intensité des contraintes initial  $K_i$

diminuant la barrière d'énergie à franchir, ou augmentant la température, permettrait d'obtenir une taille caractéristique  $V$  plus grande.

## 4.5 Conclusion

Notre modèle décrit la croissance lente d'une fissure selon un processus thermiquement activé où les fluctuations de contraintes, dues aux fluctuations statistiques à l'équilibre thermodynamique, permettent de franchir un seuil rupture. Il prédit une approche exponentielle du temps de rupture  $\tau$ , avec une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ . Ces prédictions analytiques apparaissent en excellent accord statistique avec aussi bien les résultats expérimentaux et numériques et permettent de décrire de manière quantitative la dynamique moyenne de rupture.

Nous pouvons rappeler les 2 points clés de notre approche théorique :

- la forme gaussienne des fluctuations statistiques de contraintes, due au caractère élastique de la plaque considérée.
- l'irréversibilité du processus de rupture.

Cette hypothèse d'irréversibilité du processus de rupture apparaît cruciale pour déterminer notamment les temps de vie de nos échantillons. Nous avons effectivement vérifié numériquement et expérimentalement que les approches utilisant la barrière d'énergie "à la Griffith" [43, 44, 45] sont mauvaises car elles supposent que la fissure peut explorer des états réversibles de longueurs de fente comprises entre la longueur de fente initiale  $L_i$  et la longueur critique de Griffith  $L_G$ .

Cependant, nous avons également mis en évidence une dynamique de croissance très intermittente : la fissure avance effectivement par sauts de différentes tailles, dont la distribution évolue en fonction de la contrainte à la pointe du défaut.

Nous allons montrer que ce comportement peut être expliqué en considérant nos échantillons comme un réseau élastique discret. Nous allons donc décrire la dynamique d'avancement de la fissure dans un paysage énergétique comportant un ensemble d'états métastables.

# Chapitre 5

## Mécanisme de croissance par sauts

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Effet de piégeage du réseau . . . . .</b>	<b>127</b>
5.1.1	Milieu élastique $2d$ discret . . . . .	127
5.1.2	Modèle numérique : réseau $2d$ de ressorts . . . . .	128
<b>5.2</b>	<b>Croissance par <i>sauts</i> thermiquement activés . . .</b>	<b>134</b>
5.2.1	Scénario de croissance . . . . .	134
5.2.2	Rappel : croissance lente et irréversible thermique- ment activée . . . . .	135
5.2.3	Distribution des tailles de sauts . . . . .	136
<b>5.3</b>	<b>Comparaison aux résultats expérimentaux . . .</b>	<b>141</b>
5.3.1	Distribution des tailles de sauts . . . . .	142
5.3.2	Moyenne et variance des tailles de sauts . . . . .	144
5.3.3	Vitesse de croissance moyenne $v$ . . . . .	147
5.3.4	Temps d'attente . . . . .	149
5.3.5	Description à une plus petite échelle et rugosité . .	150
<b>5.4</b>	<b>Comparaison aux résultats numériques . . . . .</b>	<b>152</b>
5.4.1	Saut de longueurs . . . . .	153
5.4.2	Temps d'attente . . . . .	153
<b>5.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>153</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons examiner la dynamique de croissance d'une fissure selon un processus d'activation thermique, dans un paysage d'énergie potentielle comportant un ensemble d'états métastables. Cette forme caractéristique de potentiel avec des barrières d'énergie liées à un effet de piégeage est dû au caractère discret du réseau élastique considéré.



Nous allons décrire un mécanisme de croissance par sauts où les fluctuations de contraintes permettent de franchir ces barrières d'énergie. Cette approche va nous permettre de déterminer la distribution des sauts de longueur de la fissure.

Nos prédictions apparaissent en très bon accord avec les observations expérimentales, montrant que la forme fonctionnelle de la distribution des tailles de sauts est caractéristique de l'approche d'un point critique.

## 5.1 Effet de piégeage du réseau

### 5.1.1 Milieu élastique $2d$ discret

Nous allons examiner une nouvelle fois le milieu idéal suivant, représenté sur la figure 5.1 :

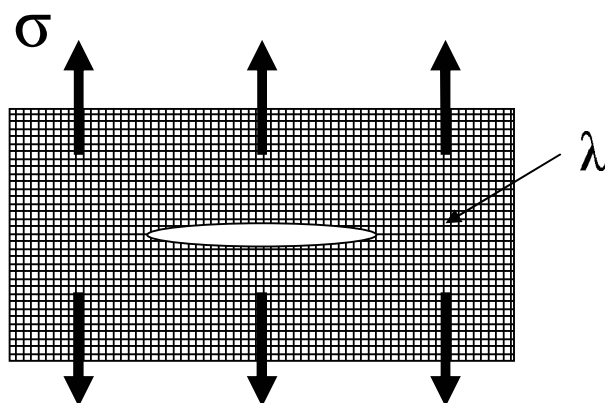


FIG. 5.1 – Plaque élastique comportant une fissure de longueur  $L$ , soumise à une contrainte  $\sigma$ . Le matériau devient discontinu à l'échelle  $\lambda$ .

La plaque parfaitement élastique, présente un défaut en son centre de longueur  $L$ , avec une échelle caractéristique de longueur de discrétisation  $\lambda$ . Cette distance caractéristique correspond dans nos échantillons de papier, à la taille des fibres, échelle mésoscopique intermédiaire de l'ordre de  $20\mu m$ , que nous avons pu observer sous microscopie électronique.

Thomson et ses collaborateurs ont été les premiers à mettre en évidence un phénomène de piégeage de la pointe de la fissure sur un site du réseau. Ce phénomène qu'ils ont nommé "lattice trapping effect" [73, 74] semble similaire à d'autres phénomènes de piégeage dans des systèmes physiques en apparence très différents (comme par exemple, en physique du solide électronique, avec les ondes de densité de charge).

Plus récemment, Marder a proposé un modèle uni-dimensionnel décrivant la croissance d'une fissure dans une bande élastique discrète. Il a alors estimé dans cette configuration la barrière d'énergie à franchir, due à la discrétisation du réseau [61]. Il faut signaler que le système considéré ("bande discrète + conditions aux bords (déformation imposée)") est différente de notre situation.

Aussi, afin d'obtenir une image de ce phénomène de piégeage dans notre

configuration et estimer la barrière d'énergie à franchir lorsque la fissure est piégée dans un état métastable, nous allons examiner le modèle numérique d'un milieu élastique discret bi-dimensionnel (réseau de ressorts décrit au chapitre précédent).

### 5.1.2 Modèle numérique : réseau 2d de ressorts

#### Energie potentielle à l'équilibre

Nous allons examiner l'énergie potentielle du réseau carré de ressorts comportant en son centre une fissure, et soumis à un effort tranchant constant sur les bords du réseau, perpendiculairement à la fissure (rappel : la longueur de la fissure est donnée par le nombre de ressorts cassés ; l'effort tranchant constant est de direction opposée sur chaque bord (parallèlement à l'axe de déplacement des ressorts. Nous modélisons ainsi une plaque élastique discrète en déformation anti-plane).

On peut mesurer dans notre simulation numérique l'énergie potentielle du réseau de ressorts correspondant à la prédiction de Griffith, pour différents états d'équilibre de longueur de fissure  $L$  (nous rappelons que dans la simulation le module d'Young  $Y = 1$ , le pas du réseau  $\lambda = 1$ , et l'énergie de surface<sup>1</sup>  $\gamma = 1/4$ ).

La figure 5.2 montre l'énergie potentielle  $U_{pot}$  obtenue pour un réseau de ressorts  $100 \times 100$  en fonction de la longueur de fissure  $L$ , pour une charge appliquée  $\sigma = 0.3817$ . Cette énergie potentielle a bien la forme prédite par Griffith pour un milieu élastique continu. On rappelle la prédiction de Griffith de l'énergie potentielle (par unité d'épaisseur de la plaque) d'une plaque élastique comportant une fissure de longueur  $L$  soumise à une contrainte constante  $\sigma$  :

$$E_G = E_o - \frac{\pi L^2 \sigma^2}{4Y} + 2\gamma L$$

avec  $Y$  module d'Young,  $\gamma$  l'énergie de surface, et  $E_o$  l'énergie potentielle élastique de la plaque sans fente.

On observe effectivement sur la figure 5.2 que cette énergie potentielle comporte un maximum correspondant à la longueur dite de Griffith  $L_G$ . On trouve alors une longueur de Griffith  $L_G = 4$ . Cependant, on mesure par ailleurs pour cette charge appliquée  $\sigma = 0.3817$ , que la force subie par le ressort à la pointe de la fissure de longueur  $L_G = 4$  est inférieure au seuil de

---

<sup>1</sup>L'énergie élastique emmagasinée avant rupture d'un ressort est :  $E_{el} = \frac{\sigma_c^2}{2Y}$ , et l'énergie de création de 2 surfaces de longueur s'écrit  $\lambda : U_s = 2\gamma\lambda$  ; compte tenu des valeurs de  $\lambda$ ,  $Y$ , et  $\sigma_c$ , au seuil de rupture  $U_s = 2\gamma = E_{el} = 1/2$ , on trouve alors  $\gamma = 1/4$ .

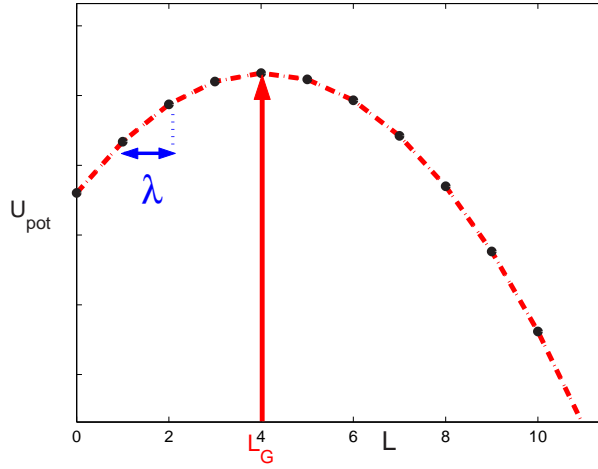


FIG. 5.2 – Schéma de l'énergie potentielle à l'équilibre  $U_{pot}$  du réseau de ressorts soumis à une contrainte constante  $\sigma = 0.3817$ , en fonction de la longueur de la fissure  $L$ . On mesure la longueur de Griffith  $L_G = 4$  correspondant au maximum de l'énergie potentielle à l'équilibre. On note l'échelle de discrétisation  $\lambda$  du réseau.

rupture  $\sigma_c$ . Pour atteindre le seuil de rupture  $\sigma_c$ , il faut augmenter la fissure de longueur  $L$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$ . Nous mesurons alors que la valeur minimale de la longueur de fissure nous permettant de dépasser le seuil de rupture est  $L_C = 10$ , soit  $L_C = 2.5L_G$ . Nous avons déjà mis en évidence au chapitre 3 paragraphe 3.2.2, où nous présentions les résultats expérimentaux, que la longueur critique prédite par Griffith  $L_G$  était au moins 2 fois plus petite que la longueur critique de rupture  $L_C$  mesurée lors de nos expériences. L'examen de l'énergie potentielle à l'équilibre ne nous permet pas de comprendre ce résultat.

Nous allons vérifier que cette différence entre la longueur critique de rupture  $L_C$  et celle établie par Griffith  $L_G$  est due à la nature discrète de notre réseau provoquant un phénomène de piégeage nommé "lattice trapping effect" par Thomson [73, 74] (ceci a été montré par Marder dans une géométrie différente [61]). Nous allons mesurer numériquement cette barrière d'énergie dans notre réseau de ressorts.

### Barrière d'énergie potentielle

Nous allons examiner l'énergie potentielle minimale nécessaire pour passer d'un état d'équilibre de longueur  $L$  à un état d'équilibre de longueur  $L + 1$ , c'est à dire le minimum d'énergie nécessaire pour amener le ressort à la pointe de la fissure au seuil de rupture. Pour estimer cette énergie, nous appliquons

une force constante externe localement sur le ressort à la pointe de la fissure (de sorte que le ressort à la pointe est à la limite de la rupture), et nous mesurons la variation de l'énergie potentielle dans tout le système (énergie élastique plus travail fourni par le chargement à force constante aux bords du réseau).

Nous obtenons alors comme le montre la figure 5.3, un ensemble d'états de transition, soit des barrières d'énergie à franchir, depuis la longueur de fente initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur de fissure critique  $L_C$ , où la barrière d'énergie à franchir s'annule.

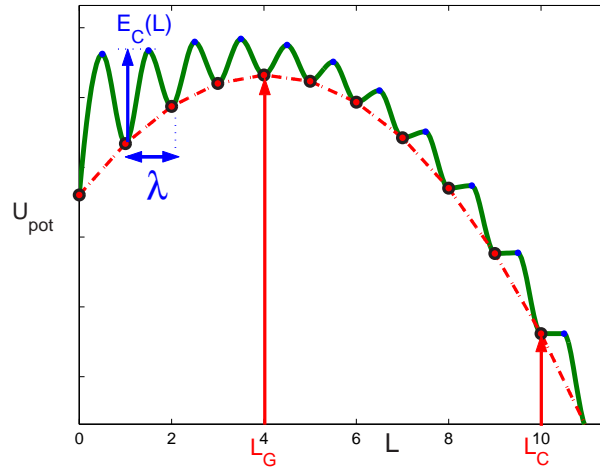


FIG. 5.3 – Schéma de l'énergie potentielle à l'équilibre du réseau de ressorts soumis à une contrainte constante  $\sigma$ , et des barrières d'énergie  $E_C(L)$  à franchir dues à l'échelle de discrétisation  $\lambda$  du réseau, en fonction de la longueur de la fissure  $L$ . On note la longueur de Griffith  $L_G$  correspondant au maximum de l'énergie potentielle à l'équilibre, et la longueur critique  $L_C$  où la barrière d'énergie à franchir est nulle  $E_C(L_C) = 0$ . (Les maxima et minima locaux de l'énergie potentielle sont calculés numériquement dans notre simulation, les droites en traits plein et pointillés sont un guide pour les yeux.)

On peut remarquer que les barrières d'énergie à franchir  $E_C(L)$  dépendent de la longueur de la fissure : elles décroissent jusqu'à s'annuler pour une longueur correspondant à la longueur critique de rupture  $L_C$ . Cette longueur critique est effectivement de 2 à 3 fois plus grandes que la longueur critique de Griffith  $L_G$ . Ce résultat est à comparer aux mesures expérimentales du chapitre 3 paragraphe 3.2.2, où nous mettions en évidence que la longueur critique de Griffith  $L_G$  est plus petite que la longueur critique de rupture  $L_C$ .

### Expression de la barrière d'énergie en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure

Nous pouvons examiner en détail les barrières d'énergie  $E_c(L)$  en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure  $\sigma_m$ , pour les différentes longueurs de fissure. La figure suivante 5.4 représente les barrières d'énergie  $E_c$  en fonction du carré de l'écart entre la contrainte à la pointe du défaut  $\sigma_m$  et le seuil de rupture  $\sigma_c$ .

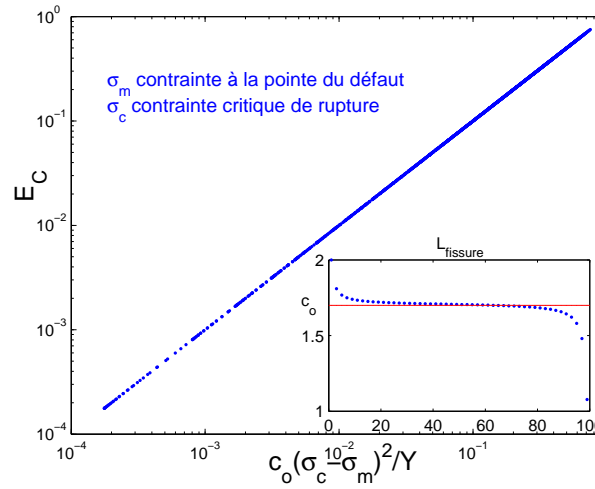


FIG. 5.4 – Barrière d'énergie  $E_c$  en fonction du carré de l'écart entre le seuil de rupture  $\sigma_c$  et la contrainte à la pointe  $\sigma_m$ . En insert, nous montrons que le coefficient numérique  $c_o$  est essentiellement constant pour une large gamme de longueurs de fissure  $c_o \simeq 1.7$ . ( $c_o$  varie entre 2 (pour  $L \rightarrow 0$ ) et 1 (pour  $L \rightarrow 100$  taille du réseau)).

Cette figure 5.4 montre donc que la barrière d'énergie volumique  $E_c$  se comporte comme le carré de l'écart entre le seuil de rupture  $\sigma_c$  et la contrainte à la pointe de la fissure  $\sigma_m$  :

$$E_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2}{2Y} c_o$$

avec  $Y$  module d'Young de la plaque ( $Y = 1$ ), et  $c_o$  est un paramètre prenant en compte le couplage élastique dans le réseau et dépend a priori de la géométrie du réseau. On montre sur la figure 5.4 en insert que ce paramètre  $c_o$  est essentiellement une constante  $c_o = 1.7$ . Dans la suite, on ne considèrera pas explicitement ce paramètre et on posera  $c_o = 1$  pour alléger les formules.

Ce résultat est en bon accord avec la prédiction établie par Marder dans une autre géométrie [61]. Il est important de noter que cette forme de barrière d'énergie à franchir dépend évidemment de notre modèle considérant une plaque parfaitement *élastique*<sup>2</sup>.

Nous allons maintenant comparer la longueur critique prédite par Griffith  $L_G$  à la longueur critique de rupture  $L_C$ .

### Comparaison longueur critique de rupture $L_C$ /longueur de Griffith $L_G$

Sur la figure 5.5, nous représentons la longueur critique de rupture  $L_C$  en fonction de la longueur de Griffith  $L_G$ , pour nos simulations numériques sur des réseaux de ressorts  $100 \times 100$ . La longueur de Griffith  $L_G$  et la longueur critique  $L_C$  ont été obtenues en déterminant l'énergie potentielle du réseau de ressorts en fonction de la longueur de la fissure, pour différentes contraintes appliquées.

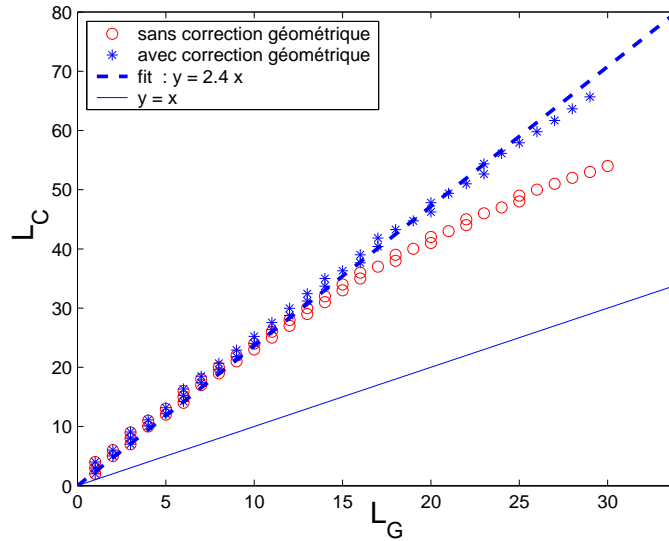


FIG. 5.5 – Simulations numériques : Longueur critique de rupture  $L_C$  en fonction de la longueur critique établie par Griffith  $L_G$ . Pour les symboles (\*), on prend en compte les effets de taille finie, avec le facteur de correction géométrique  $\psi_r$ , tel que  $L_C^{corr} = L\psi_r$ . La droite en traits discontinus représente le meilleur fit linéaire tel que  $L_C^{corr} = 2.4L_G^{corr}$ . A titre indicatif, on a tracé la droite  $L_C = L_G$ .

<sup>2</sup>Thomson [73, 74] évoque des modifications de la forme de la barrière en fonction de paramètres extérieurs (attaque chimique ...), d'autres [47, 48] examinent l'effet de la température.

Sur la figure 5.6, nous rappelons les résultats expérimentaux obtenus au chapitre 3 paragraphe 3.2.2.

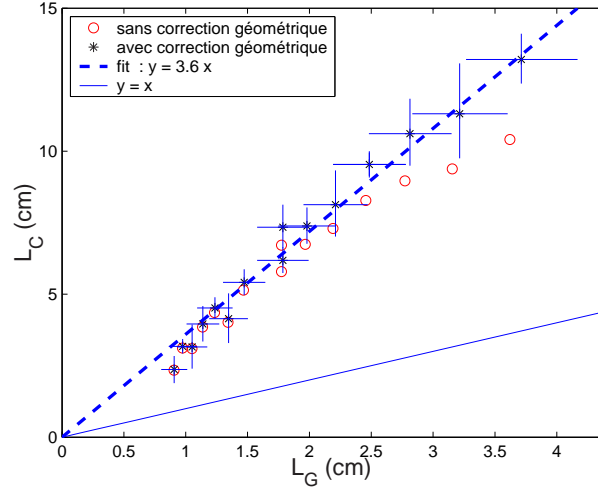


FIG. 5.6 – Résultats expérimentaux : Longueur critique de rupture moyennée sur un ensemble d'expériences de fluages réalisées dans les mêmes conditions  $\langle L_C \rangle$ , en fonction de la longueur de Griffith  $\langle L_G \rangle$ . Pour les symboles (\*), on prend en compte les effets de taille finie, avec le facteur de correction géométrique  $\psi_r$ , tel que  $L = L\psi_r$ . La droite en traits discontinus représente le meilleur fit linéaire tel que  $L_c^{corr} = 3.6L_G^{corr}$ . A titre indicatif, on a tracé la droite  $L_C = L_G$ .

Sur les figures 5.5 et 5.6, nous observons que la longueur de Griffith  $L_G$  est plus petite que la longueur critique de rupture  $L_c$  de nos échantillons numériques et expérimentaux. Nous pouvons remarquer encore une fois l'importance des effets de taille finie, qui jouent exactement le même rôle aussi bien sur les échantillons numériques (réseaux de ressorts) que les feuilles de papier.

Nous pouvons donc conclure en insistant sur le fait que les résultats expérimentaux apparaissent en assez bon accord avec les résultats issus des simulations numériques, et mettent en évidence que la longueur prédite par Griffith  $L_G$  n'est pas la longueur critique de rupture.



## 5.2 Croissance lente et irréversible par *sauts* thermiquement activés

### 5.2.1 Scénario de croissance

Cette forme d'énergie potentielle fait apparaître un ensemble d'états métastables pouvant piéger la fissure même au delà de la longueur de Griffith  $L_G$ . Sous l'effet de fluctuations dues au bruit thermique, nous pouvons proposer un scénario de croissance lente et irréversible de la fissure.

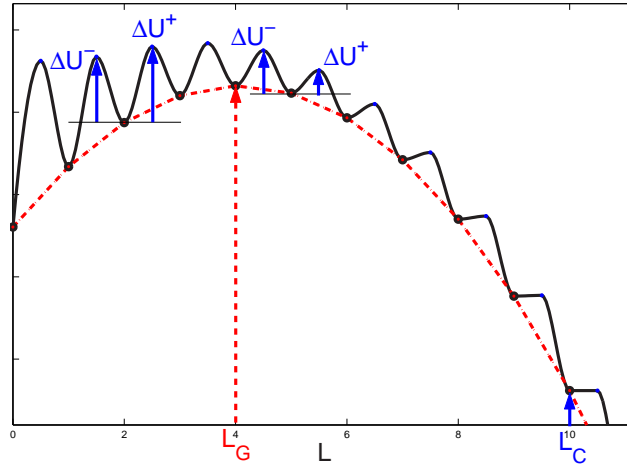


FIG. 5.7 – Croissance lente et irréversible d'une fissure au delà de la longueur de Griffith  $L_G$  dans le potentiel d'énergie du réseau de ressorts, comportant un ensemble d'états métastables dû à la nature dicrète du réseau.

Sur la figure 5.7, nous distinguons 3 régimes en fonction de la longueur de la fissure :

- $L < L_G$  : *Guérison*

On remarque pour des longueurs de fissure  $L$  inférieures à la longueur de Griffith  $L_G$ , les barrières d'énergie à franchir, sont plus petites pour reculer que pour avancer, soit  $\Delta U^-(L) < \Delta U^+(L)$ . Aussi, sous l'effet de fluctuations, la fissure aura *tendance en moyenne à se refermer* pour des longueurs inférieures à la longueur de Griffith  $L_G$ .

- $L_G < L < L_C$  : *Croissance lente et irréversible*

Dans cette gamme de longueur de fissure, comprise entre la longueur de Griffith  $L_G$  et la longueur critique  $L_C$ , sous l'effet de fluctuations, on voit apparaître naturellement un processus de croissance lente et irréversible. La croissance est *lente*, car la fissure peut rester piégée dans

les états métastables dus aux barrières d'énergie à franchir. De plus, l'avancement est *irréversible en moyenne* (localement on a une probabilité non nulle de revenir en arrière), car contrairement au régime précédent, la probabilité pour que la fissure avance est plus grande que celle pour se refermer,  $\Delta U^-(L) < \Delta U^+(L)$ . Enfin, on peut également remarquer que la dynamique d'avancement devrait s'accélérer car les barrières d'énergie diminuent à mesure que l'on s'approche de la longueur critique  $L_c$ .

–  $L > L_C$  : *Rupture rapide*

Lorsque la fissure atteint la longueur critique  $L_C$ , la rupture est soudaine, car il n'y a plus de barrière pouvant piéger la fissure. La longueur  $L_C$  correspond bien à une longueur critique de rupture où l'on atteint un régime dynamique de rupture rapide.

Ce mécanisme d'avancement de la fissure apparaît tout à fait cohérent avec les différentes observations et résultats obtenus lors des expériences de chargement à force constante sur des feuilles de papier. Nous avons effectivement observé la croissance lente d'une fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$ , où la rupture est alors brutale. Nos expériences ont été réalisées dans une gamme de longueur de fissure au delà de la longueur de Griffith :  $L_C > L_i \gtrsim L_G$ . De plus, cette dynamique de croissance est d'une part très intermittente, la fissure avance par sauts de tailles, puis peut rester piégée pendant un temps d'attente  $t_w$ . D'autre part, la dynamique de croissance moyenne s'accélère à l'approche du seuil de rupture.

Aussi, nous allons étendre le modèle présenté au chapitre précédent pour décrire dans ce paysage d'énergie potentielle (comportant un ensemble d'états métastables), la croissance lente d'une fissure selon un processus d'activation.

Cette analyse va nous permettre notamment d'obtenir la distribution des tailles de sauts observés durant le processus de rupture .

### 5.2.2 Rappel : croissance lente et irréversible thermiquement activée

Les points importants du modèle présenté au chapitre 4 paragraphe 4.2 sont rappelés brièvement :

- Nous considérons une plaque élastique (discrète à l'échelle  $\lambda$ ). A température finie  $T$ , dans un volume fixé  $V$  de la plaque, le bruit thermique provoque des fluctuations statistiques de contraintes  $\sigma_f$  autour de la

contrainte moyenne  $\sigma_m$  de distribution gaussienne :

$$p(\sigma_f) \propto \exp[-(\sigma_f - \sigma_m)^2 V / 2Y k_B T]$$

- Le matériau casse lorsque les fluctuations de contraintes  $\sigma_f$  permettent d'atteindre la contrainte critique  $\sigma_c$  correspondant au seuil de rupture, avec une probabilité  $\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c)$

$$\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) = \int_{\sigma_c}^{\infty} p(\sigma_f) d\sigma_f$$

- En considérant un mécanisme de rupture irréversible, la vitesse de croissance de la fissure est supposée proportionnelle à la probabilité d'obtenir de telles fluctuations  $\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c)$ . Nous obtenons alors la vitesse de croissance de la fissure (cf. équation 4.5) :

$$\begin{aligned} v &= v_0 \mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) = v_0 \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) \\ \text{soit} \quad v &= v_0 \int_{U_c}^{\infty} \frac{e^{-U_f} dU_f}{\sqrt{\pi U_f}} \quad (5.1) \\ \text{avec} \quad U_f &= \frac{(\sigma_f - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T} \quad \text{et} \quad U_c = U_f(\sigma_c) = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T} \end{aligned}$$

$v_0$  est une vitesse caractéristique  $v_0 = \frac{\lambda}{\theta_0}$  qui correspond au rapport de l'échelle de longueur discrète  $\lambda$  (taille du réseau) et d'un temps caractéristique  $\theta_0$  (inverse d'une fréquence de vibration).

L'intégration de cette équation 5.1 nous avait permis d'obtenir la dynamique d'évolution moyenne de la fissure.

Nous allons maintenant étendre cette description en considérant le paysage d'énergie potentielle décrit au paragraphe précédent, un des objectifs étant de déterminer la distribution des tailles de sauts durant le processus de croissance de la fissure.

### 5.2.3 Distribution des tailles de sauts

Nous considérons une fissure de longueur  $L$  supérieure à la longueur de Griffith  $L_G$  :  $L > L_G$ . Cette fissure est prise dans un piège élastique formée par la barrière d'énergie  $E_c(L)$ . Comme nous l'avons déjà remarqué, dans cette gamme de longueurs, la croissance de la fissure est en moyenne irréversible (à cause de la forme de la barrière d'énergie, la probabilité pour que la fissure s'ouvre est plus grande que la probabilité pour qu'elle se referme). En ne considérant que les barrières d'énergie  $\Delta U^+$  et en négligeant les barrières

$\Delta U^-$ , nous réalisons une approximation qui est d'autant meilleure lorsqu'on s'approche du seuil de rupture soit  $L \gg L_G$ . On peut donc s'attendre, lorsque  $L \gtrsim L_G$  (proche de la longueur de Griffith), à des corrections sur les prédictions que nous allons établir.

### Vitesse moyenne d'avancement de la fissure

Dans un premier temps, nous allons exprimer la vitesse moyenne d'avancement de la fissure d'une manière différente, en considérant que cette vitesse moyenne de croissance de la fissure correspond au rapport de la taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  sur le temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  dans un état métastable :

$$v = \frac{\langle s \rangle}{\langle t_w \rangle} = \frac{\int_{\lambda}^{\infty} s P_s(s) ds}{\langle t_w \rangle} \quad (5.2)$$

avec  $P_s(s)$  distribution de probabilité des tailles de sauts.

Ces 2 expressions de la vitesse moyenne  $v$  (éq.5.1 et éq.5.2) vont nous permettre de relier la distribution de probabilité des tailles de sauts  $P_s(s)$  à la distribution de probabilité des fluctuations de contraintes  $p(\sigma_f)$  ou d'énergie  $p(E_f(\sigma_m))$ . Il faut signaler que le lien entre ces 2 probabilités n'est pas simple. En effet, la distribution des fluctuations d'énergie est explorée (partiellement) à chaque réalisation du bruit thermique soit chaque pas de temps élémentaire  $\theta_0$  alors que la distribution des tailles de sauts ne l'est qu'au bout d'un temps moyen  $\langle t_w \rangle$  passé dans un piège.

Pour expliciter cette vitesse moyenne  $v = \frac{\langle s \rangle}{\langle t_w \rangle}$ , nous allons d'une part exprimer le temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$ , mais surtout nous allons tenter de relier la taille d'un saut de longueur de fissure  $s$  avec les fluctuations d'énergie  $E_f(\sigma_m)$  dues au bruit thermique.

### Temps d'attente moyen $\langle t_w \rangle$

Sous l'effet des fluctuations de contraintes dues au bruit thermique, la fissure va pouvoir sortir du piège. Le temps moyen d'attente  $\langle t_w \rangle$  de la fissure dans cet état métastable dépend de la hauteur de la barrière d'énergie relative  $U_c$  à franchir :

$$\begin{aligned} \langle t_w \rangle &= \tau_0 e^{U_c} \\ \text{avec} \quad U_c &= U_f(\sigma_c) = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T} \end{aligned} \quad (5.3)$$

### Mécanisme d'arrêt de la fissure et longueur des sauts $s$ dus aux fluctuations d'énergie $E_f(\sigma_m)$

Nous allons exprimer maintenant la taille des sauts lors du processus d'endommagement en fonction de l'apport en énergie  $E_f(\sigma_m)$  dû aux fluctuations de contraintes.

Grâce au bruit thermique, les contraintes locales  $\sigma_f$  fluctuent, provoquant ainsi une augmentation de l'énergie libre localement. Cet apport en énergie  $E_f(\sigma_m)$  peut être estimé en effectuant un développement de Taylor de l'énergie élastique volumique dans un piège :  $E_f(\sigma_m) \simeq (\sigma_f - \sigma_m)^2/2Y$ <sup>3</sup>. Cette augmentation d'énergie  $E_f(\sigma_m)$  va permettre alors de franchir la barrière d'énergie  $E_c(L)$ .

#### *Mécanisme de dissipation*

Cependant, sans mécanisme dissipatif, comme les barrières d'énergie  $E_c(L)$  décroissent avec la longueur de la fissure  $L$ , l'énergie apportée par une fluctuation statistique de contrainte va permettre à la fissure de grandir jusqu'à casser complètement l'échantillon. Il est donc nécessaire pour piéger à nouveau la fissure d'introduire un mécanisme de dissipation d'énergie qui va provoquer l'arrêt de la fissure.

Nous supposons pour simplifier que lorsque la fissure franchit la barrière d'énergie  $E_c(L)$ , la fissure perd l'énergie équivalente à la hauteur de la barrière qu'elle vient de franchir. De plus, nous considérons également que la fissure ne gagne pas l'énergie élastique libérée en avançant et en atteignant une position d'énergie potentielle plus basse. Il est important de signaler que le mécanisme simple que nous proposons est "doublement dissipatif". Cette dissipation d'énergie peut apparaître expérimentalement sous la forme d'émissions d'ondes acoustiques, ou par exemple en déformant de manière plastique ou visqueuse l'échantillon.

Ainsi, après avoir passé une barrière d'énergie  $E_c(L)$ , la fissure a avancé d'un pas du réseau de longueur  $\lambda$  et atteint le nouveau piège avec une barrière d'énergie  $E_c(L+1)$ . L'énergie qu'il lui reste à disposition  $E_f(\sigma_m) - E_c(L)$  peut être éventuellement suffisante pour franchir la nouvelle barrière d'énergie  $E_c(L+1)$  et avancer encore d'un pas du réseau  $\lambda$ . Nous pouvons alors compter en pas du réseau  $\lambda$  le nombre de barrières d'énergie franchies  $n$ , et donc estimer la taille d'un saut  $s$  effectué par la fissure sous l'effet d'une fluctuation

---

<sup>3</sup>On peut remarquer que ce résultat est cohérent avec la forme gaussienne de la distribution des fluctuations de contraintes et la forme des barrières d'énergie à franchir  $E_c(L)$ , dû au caractère élastique de la plaque discrète considéré.

d'énergie  $E_f(\sigma_m)$  :

$$s = n\lambda = \frac{E_f(\sigma_m)}{E_c(L)}\lambda \quad (5.4)$$

Il est encore important de remarquer que pour compter le nombre de barrières franchies, nous avons négligé la décroissance de la barrière d'énergie  $E_c(L)$  avec la longueur de la fissure, en considérant  $E_c(L+n) \simeq E_c(L)$ .

### Distribution des tailles de sauts $s$

Nous pouvons à partir des 2 expressions de la vitesse moyenne d'avancement (éq.5.1 et 5.2), et grâce à l'équation 5.4, relier la probabilité d'obtenir une fluctuation d'énergie  $E_f(\sigma_m)$  à la probabilité que la fissure avance d'un saut de taille  $s$ .

Nous obtenons (le calcul est détaillé en Annexe B), la distribution de probabilité  $P_s(s)$  des sauts de longueurs de fissure  $s$  durant le processus d'endommagement :

$$P_s(s) = N(U_c) \frac{\sqrt{\lambda}}{2} s^{-3/2} e^{-s/\xi} \quad (5.5)$$

$$\text{où} \quad \xi = \frac{\lambda}{U_c} = \frac{\lambda 2Y k_B T}{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V} \quad (5.6)$$

Le coefficient de normalisation  $N(U_c)$  s'écrit :

$$N(U_c) = \frac{e^{U_c}}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \text{erfc}(\sqrt{U_c})]} \quad \text{et} \quad U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T}$$

Nous trouvons donc une distribution de probabilité  $P_s(s) \propto s^{-\alpha} e^{-s/\xi}$  en loi de puissance avec un exposant  $\alpha = 3/2$  et une coupure exponentielle avec une longueur caractéristique  $\xi \propto (\sigma_c - \sigma_m)^{-2}$  qui diverge à l'approche du seuil critique de rupture  $\sigma_c$ .

#### Commentaires

- Cette forme apparaît caractéristique de l'approche d'un point critique (ici le seuil de rupture  $\sigma_c$ ) lors d'un processus sous-critique (mécanisme d'endommagement progressif à chargement constant inférieur au seuil de rupture) observée dans divers systèmes physiques [10] (et en géophysique [18, 63]). De plus, on peut remarquer que des travaux numériques montrent des distributions de tailles d'avalanches de la même forme [70].

- On peut remarquer également que cette distribution de probabilité a une forme similaire aux distributions de probabilité que l'on obtient en théorie de la percolation [9]. De nombreuses analyses basées effectivement sur la théorie de la percolation tentent de décrire la rupture de matériaux hétérogènes (voir [40] et références) et considèrent la rupture comme une transition de phase, le seuil de rupture apparaissant comment un point critique de cette transition.
- Diverses expériences [21, 60, 68] et simulations numériques [67] montrent des comportements à l'approche du seuil de rupture en accord qualitatif avec les propriétés d'un point critique [66]. En effet, la mesure de l'émission acoustique offre un comportement en loi de puissance aussi bien pour la distribution de probabilité de l'énergie des événements de rupture  $E^{-\alpha}$  que pour la distribution de probabilité du temps séparant deux événements de rupture  $t^{-\beta}$  pour différents matériaux hétérogènes (bois aggloméré :  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.9$  [21], papier :  $\alpha = 1.3$ ,  $\beta = 1.25$  [60], mousses polymères :  $\alpha = 1.2$ ,  $\beta = 1.2$  [26], composites de fibres de verre :  $\alpha = 1.5$  [25]). Il est remarquable d'observer que les divers exposants des lois de puissance pour l'énergie libérée  $E^{-\alpha}$  mesurés sur différents matériaux apparaissent plutôt proches de 1.5. Or, notre modèle qui prédit une distribution de tailles de sauts comportant une loi de puissance avec un exposant  $3/2$ , identifie justement la taille des sauts à une énergie (plus exactement, à une fluctuation d'énergie).

### Taille moyenne et variance des sauts

A partir de cette distribution de probabilité des tailles de sauts  $P_s(s)$ , on peut estimer les premiers moments de la distribution soit : la taille moyenne  $\langle s \rangle = \int_{\lambda}^{\infty} s P_s(s) ds$  et le moment d'ordre 2,  $\langle s^2 \rangle = \int_{\lambda}^{\infty} s^2 P_s(s) ds$ .

Nous obtenons alors pour la taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  :

$$\langle s \rangle = N(U_c) \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{2\sqrt{U_c}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) = \frac{\lambda}{2U_c} \frac{\sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]} \quad (5.7)$$

Cette taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  nous permet de reformuler la vitesse moyenne d'avancement de la fissure  $v$  :

$$\begin{aligned} v &= \frac{\langle s \rangle}{\langle t_w \rangle} = \frac{v_0 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{U_c}} N(U_c) e^{-U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) \\ v &= \frac{\lambda}{2U_c \tau_0} \frac{\sqrt{\pi U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cette expression de la vitesse 5.8 est différente de celle supposée initialement 5.1 :  $v = v_0 \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})$ . On retrouve en fait cette expression dans le cas limite où on est loin du seuil de rupture (voir ci-dessous les comportements asymptotiques).

Nous pouvons estimer également le moment d'ordre 2 de la distribution des tailles de sauts  $\langle s^2 \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= N(U_c) \frac{\lambda^2 \sqrt{\pi}}{4U_c^{3/2}} \left( \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) + 2\sqrt{\frac{U_c}{\pi}} e^{-U_c} \right) \\ \langle s^2 \rangle &= \frac{\lambda^2}{4U_c^2} \frac{2U_c + \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]} \end{aligned} \quad (5.9)$$

On peut alors remarquer les 2 comportements asymptotiques suivants :

- *Loin du seuil de rupture* :  $\sigma_m \ll \sigma_c$

La barrière d'énergie  $U_c$  est grande,  $U_c \gg 1$ , on obtient alors,  $\langle s \rangle \simeq \lambda$  et  $\langle s^2 \rangle \simeq \lambda^2$ . Loin du seuil de rupture, on remarque que la fissure avance en effectuant des sauts de longueur correspondant à un unique pas du réseau  $\lambda$ . La vitesse de croissance moyenne décroît de manière exponentielle loin du seuil de rupture  $\sigma_c$  :  $v \simeq v_0 e^{-U_c}$ .

- *Proche du seuil de rupture* :  $\sigma_m \rightarrow \sigma_c$

Dans cette limite où la barrière d'énergie  $U_c$  est petite,  $U_c \rightarrow 0$ , notre modèle prédit une divergence de la moyenne et la variance des tailles de sauts à l'approche du point critique de rupture  $\sigma_c$  :  $\langle s \rangle \sim (\sigma_c - \sigma_m)^{-1}$  et  $\langle s^2 \rangle \sim (\sigma_c - \sigma_m)^{-3}$ . (On peut remarquer que nous prédisons une divergence cubique de la variance des tailles de sauts). De plus, dans ce régime, la vitesse de croissance de la fissure est alors dominée par la divergence des tailles de sauts :  $v \simeq v_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{U_c}} \sim (\sigma_c - \sigma_m)^{-1}$ . De plus, nous retrouvons un résultat similaire à celui obtenu pour la longueur caractéristique de croissance moyenne (voir Chapitre 4 paragraphe 4.2).

## 5.3 Comparaison aux résultats expérimentaux

Nous pouvons maintenant confronter les prédictions de notre approche théorique, concernant en particulier la distribution des tailles de sauts, aux résultats expérimentaux obtenus lors des expériences de fluage réalisées sur des échantillons de papier.

Expérimentalement, nous estimons la contrainte à la pointe de la fissure  $\sigma_m$  grâce au facteur d'intensité des contraintes  $K$  qui donne une mesure de



la divergence de la contrainte à la pointe de la fissure à l'échelle discrète  $\lambda$  :  $\sigma_m = K/\sqrt{\lambda}$ . Cette longueur caractéristique qui est le pas du réseau dans notre approche théorique et numérique, correspond dans nos expériences sur des feuilles de papier à une échelle mésoscopique de l'ordre de la taille des fibres.

Il est important de remarquer qu'expérimentalement, nous avons une longueur de coupure  $\ell_m$  (correspondant à la résolution de la caméra et l'analyse d'images de l'ordre de  $150\mu m$ ). En considérant cette longueur de coupure  $\ell_m$ , on peut montrer que la condition de normalisation de la distribution de probabilité  $P_s(s)$  réduit notre modèle à un unique paramètre :  $\frac{V}{\lambda^2}$ , rapport entre l'échelle volumique des fluctuations statistiques  $V$  et l'échelle mésoscopique de discrétisation  $\lambda$  (voir Annexe B.4 avec les éq. B.7 et B.8).

En prenant donc comme échelle mésoscopique de discrétisation pour nos échantillons de papier  $\lambda = 50\mu m$  (nous rappelons la mesure du diamètre moyen des fibres  $d_f = 20\mu m$ )<sup>4</sup>, il ne reste donc qu'un seul paramètre libre  $V$  pour effectuer les ajustements de nos données.

Dans un premier temps, nous allons examiner la distribution des tailles de sauts.

### 5.3.1 Distribution des tailles de sauts

Sur la figure 5.8, nous rappelons les distributions des longueurs de sauts de fissure mesurées sur l'ensemble des expériences de fluage réalisées sur des échantillons de papier, pour différents intervalles de valeurs du facteur d'intensité des contraintes  $K$ .

Chaque distribution, avait été obtenue avec un même nombre de points, soit typiquement 1000 points. Les gammes de facteurs d'intensité des contraintes choisies  $K$  sont précisées sur la figure 5.8. On remarque que pour les valeurs de  $K$  les plus faibles et les plus importantes (respectivement loin et proche du seuil de rupture), les bandes de  $K$  sont plus larges, dues au manque de statistiques. Pour éviter de moyenner sur des intervalles de  $K$  trop larges, nous pouvons effectuer cette même analyse en fixant une gamme de facteurs d'intensité des contraintes  $K$ .

Nous montrons sur la figure 5.9 qu'en fixant un intervalle de facteurs d'intensité des contraintes  $K$ , on obtient le même comportement observé sur la figure 5.8 et mis en évidence au chapitre 3 paragraphe 3.3.2. Nous observons 2 régimes, selon la taille des sauts. Pour les petites tailles de sauts, la distribution ne semble pas dépendre de la valeur du facteur d'intensité des

<sup>4</sup>on peut considérer que l'enchevêtrement moyen est de l'ordre de la taille de quelques fibres

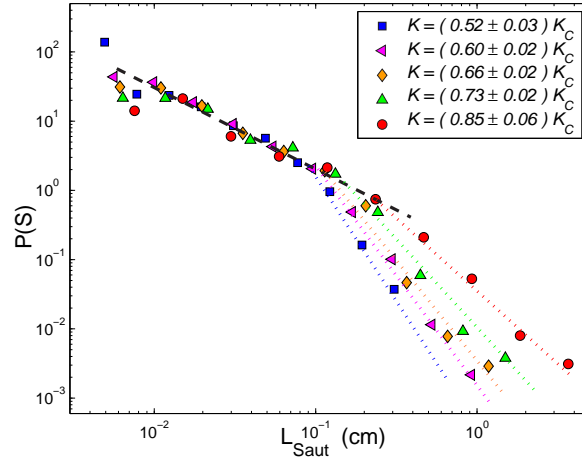


FIG. 5.8 – Distribution de probabilité des tailles de sauts pour différentes valeurs du facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . Les droites en traits discontinus et pointillés servent de guides pour les yeux.

contraintes. Alors que pour les tailles de sauts plus importantes, la queue de la distribution évolue en fonction de la contrainte à la pointe du défaut, avec une longueur de coupure qui augmente avec le facteur d'intensité des contraintes  $K$ .

Sur cette même figure 5.9, on représente également les courbes issues de l'ajustement de l'équation B.7 (voir Annexe B), avec  $V$  comme unique paramètre libre.

Dans un premier temps, on observe donc que qualitativement la prédiction de notre modèle  $P_s(s) \propto s^{-3/2} e^{-s/\xi}$  reproduit de manière très satisfaisante le comportement de la distribution des tailles de sauts. Les petites tailles de sauts semblent donc être distribuées selon une loi de puissance avec un exposant  $-3/2$ . Puis, pour les plus grandes tailles de sauts, on observe une coupure exponentielle du type  $e^{-s/\xi}$  avec une longueur caractéristique  $\xi$  qui diverge comme l'inverse du carré de l'écart au seuil de rupture  $\xi \propto (K_C - K)^2$ . Ces résultats mettent en évidence l'évolution de la distribution des tailles de sauts à l'approche du seuil critique de rupture. A la limite, au seuil de rupture, lorsque  $K = K_C$ , on devrait obtenir une distribution de tailles de sauts en loi de puissance  $s^{-3/2}$  signifiant qu'alors il n'y a pas d'échelle de longueur caractéristique (nous pourrions mesurer toutes tailles de sauts depuis  $\ell_m$  jusqu'à la longueur de l'échantillon). Au paragraphe suivant, nous mettrons justement en évidence la divergence à l'approche du seuil de rupture de la taille moyenne et la variance des sauts.

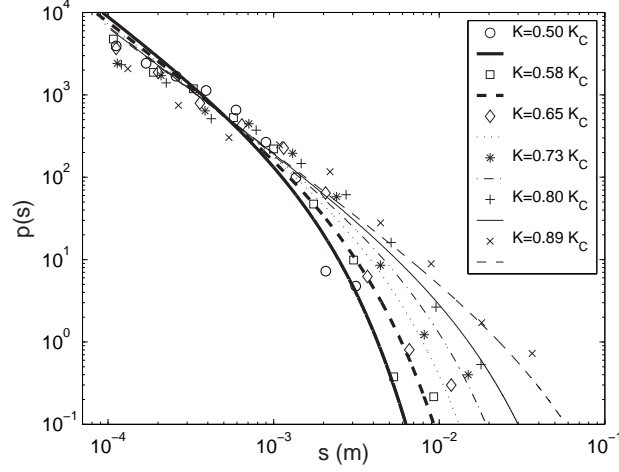


FIG. 5.9 – Distribution de probabilité des tailles de sauts pour différentes valeurs du facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . Les différentes courbes représentent les meilleurs fits de l'éq. B.7 avec comme unique paramètre libre  $V$ . Les valeurs obtenues sont très robustes :  $\langle V \rangle = 5 \pm 1 \text{ \AA}^3$ .

De plus, on peut remarquer que pour les différentes distributions les valeurs du paramètre de fit  $V$  sont très robustes. On obtient comme valeur moyenne de cette échelle volumique :  $\langle V \rangle = 5 \pm 1 \text{ \AA}^3$ . Avant de discuter la petitesse de cette échelle, nous présentons les résultats de l'analyse de la moyenne et du moment d'ordre 2 des tailles de sauts.

### 5.3.2 Moyenne et variance des tailles de sauts

Sur la figure 5.10, nous rappelons les résultats obtenus et présentés au chapitre 3 paragraphe 3.3.2, pour la taille moyenne des sauts. De plus, nous examinons également le comportement de la variance des tailles de sauts. Comme pour l'étude des distributions de taille de sauts, nous avons effectué notre analyse sur un même nombre de points. L'estimation de la valeur moyenne exigeant moins de statistiques que pour celle de la distribution, nous pouvons réduire ce nombre de points et donc effectuer notre étude pour un plus grand nombre d'intervalles de différentes valeurs de  $K$ .

La figure 5.10 met en évidence d'une part que la taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  diverge de manière linéaire avec l'écart au seuil de rupture ( $K_c - K$ ) :  $\langle s \rangle \propto (K_c - K)^{-1}$  et d'autre part que la divergence de la variance<sup>5</sup> des sauts

<sup>5</sup>Nous appelons à tort "variance" le moment d'ordre 2 de la distribution des tailles de sauts (nous n'avons pas retiré la valeur moyenne)

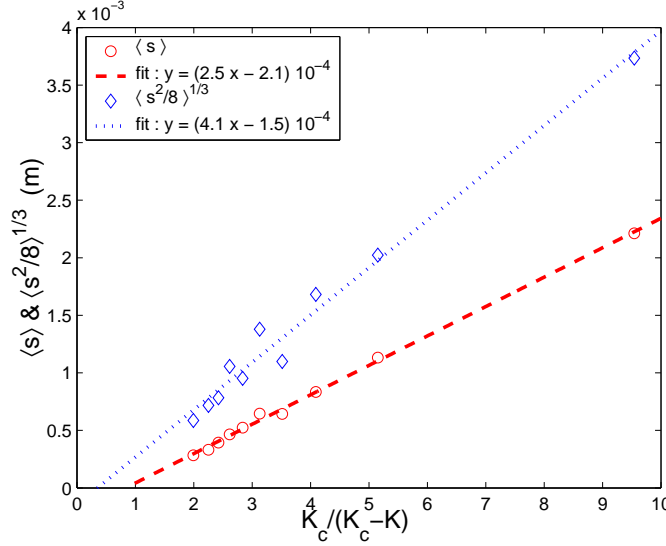


FIG. 5.10 – Taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  (symboles  $\circ$ ), et racine cubique du moment d'ordre 2 des tailles de sauts (on a divisé par un facteur 8 pour examiner les 2 comportements sur une même échelle)  $\langle s^2 \rangle^{1/3}$  (symboles  $\diamond$ ), en fonction de l'inverse de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ . Les droites en traits pointillés et discontinus représentent respectivement les meilleurs fits linéaires : de la taille moyenne des sauts  $y = (2.5x - 2.1)10^{-4}$  et de la racine cubique de la variance des sauts  $y = (4.1x - 1.5)10^{-4}$ .

$\langle s^2 \rangle$  avec l'écart au seuil de rupture est cubique soit  $\langle s^2 \rangle \propto (K_c - K)^3$ . Ces résultats apparaissent en excellent accord avec les prédictions de notre modèle.

Pour être encore plus convaincant et montrer que notre modèle reproduit effectivement de façon remarquable le comportement asymptotique des 2 premiers moments de la distribution, nous pouvons adopter la même approche qu'au paragraphe précédent en effectuant l'analyse sur un intervalle de  $K$  fixé. Nous superposons alors sur la figure 5.11, la taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  et la racine cubique  $\langle s^2 \rangle^{1/3}$  en fonction de l'écart au seuil de rupture. Les droites en trait plein correspondent à la prédiction de notre modèle, en utilisant le paramètre  $\langle V \rangle = 5\text{\AA}^3$  obtenu à partir des ajustements des distributions de tailles de sauts.

Nous observons donc que notre modèle décrit de manière satisfaisante non seulement l'évolution de la distribution des tailles de sauts avec un paramètre libre  $V$  quasiment constant, mais également la divergence asymptotique de la taille moyenne et la variance des sauts. On peut remarquer sur la figure

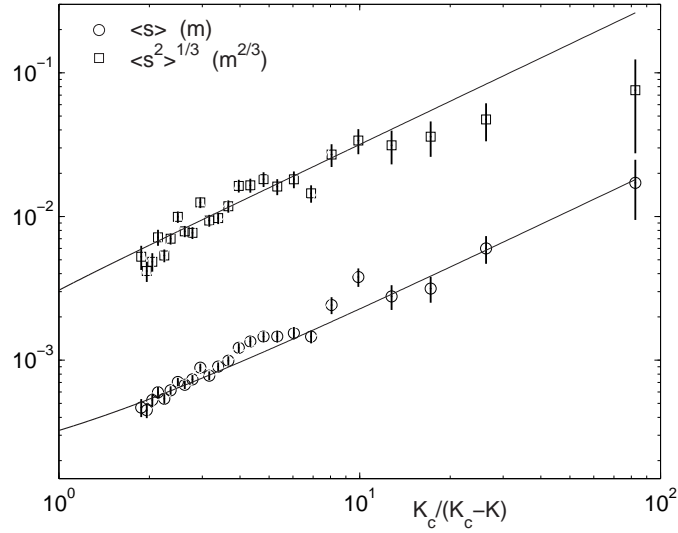


FIG. 5.11 – Taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle$  (symboles  $\circ$ ), et racine cubique du moment d'ordre 2 des tailles de sauts  $\langle s^2 \rangle^{1/3}$  (symboles  $\diamond$ ), en fonction de l'inverse de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C$ .

5.11 que notre modèle décrit le comportement de la taille moyenne des sauts jusqu'à 1% du seuil de rupture  $K_C$  (notre modèle prédit que le rapport de l'écart-type de la taille des sauts sur la taille moyenne des sauts diverge à l'approche du seuil de rupture, et par conséquent la mesure de la variance des sauts est d'autant plus difficile près du point critique. On remarque effectivement qu'à moins de 10% du seuil de rupture, la prédiction du moment d'ordre 2 apparaît moins bonne).

Nous allons maintenant discuter l'échelle de volume des fluctuations  $V$  obtenue.

### Echelle volumique $V$ des fluctuations statistiques

Nous rappelons que dans notre approche théorique, le volume  $V$  représente l'échelle à laquelle les fluctuations statistiques de contrainte sont capables de déclencher un événement de rupture.

Les ajustements des distributions de tailles de sauts avec comme unique paramètre libre cette échelle volumique  $V$ , donnent de manière robuste une taille atomique  $V^{1/3} = 1.7\text{\AA}$  et montrent donc que les fluctuations statistiques de contrainte agissent à une échelle extrêmement petite (beaucoup plus petite que la taille des sauts que nous avons mesurés). On peut également remarquer que cette valeur apparaît plus petite que celle que nous avons estimée

à partir de l'analyse des différents paramètres caractérisant la dynamique d'avancement moyenne (longueur caractéristique de croissance  $\xi$ , et temps de rupture  $\tau$ ). Nous avons trouvé effectivement une échelle nanométrique  $V^{1/3} \sim 4nm$  (voir chapitre 4 paragraphes 4.4.1 et 4.4.2).

La "petitesse" de cette échelle peut être a priori surprenante et dérangeante. Cependant, il faut remarquer que notre approche prédit une limite inférieure pour cette taille microscopique.

D'une part, le mécanisme de dissipation d'énergie proposé permettant de piéger la fissure, sur-estime de manière très importante un véritable processus de dissipation ( par exemple une déformation plastique ou visqueuse). En effet, nous supposons que toute l'énergie élastique libérée lors de l'avancement de la fissure est dissipée et ne permet pas à la fissure éventuellement de poursuivre son avancement. En diminuant la dissipation d'énergie, la fissure pourrait réaliser des sauts de longueur plus importants. Pour obtenir la même vitesse expérimentale, la barrière d'énergie doit être plus importante (pour piéger la fissure plus longtemps), ce qui est alors possible si l'échelle volumique  $V$  est plus grande.

D'autre part, nous avons complètement négligé le rôle du désordre sur les propriétés du matériau. Récemment, Scoretti, Ciliberto et Guarino ont montré sur un modèle  $1d$  que le désordre réduit de manière effective la barrière d'énergie à franchir [58, 57], et donc permet la rupture pour des échelles volumiques  $V$  plus grandes. En collaboration avec Guarino et Scoretti, nous sommes justement en train de vérifier numériquement sur notre réseau de ressorts  $2d$  le rôle du désordre, en distribuant de manière aléatoire le seuil de rupture des ressorts. Des résultats préliminaires semblent confirmer que le désordre réduit les barrières d'énergie à franchir, nous permettant de définir une température effective plus grande que la température thermodynamique.

### 5.3.3 Vitesse de croissance moyenne $v$

Nous rappelons également les résultats obtenus pour la vitesse moyenne de croissance de la fissure ( voir chapitre 3 et paragraphe 3.2.5).

Sur la figure 5.12, nous avons représenté pour différentes expériences de fluage, la vitesse de croissance moyenne  $v$  en fonction de l'inverse de l'écart au seuil de rupture  $(K_C - K)^{-1}$ . Nous réalisons un ajustement des vitesses à partir de l'équation B.2.6 (voir Annexe B en utilisant 2 paramètres libres l'échelle volumique des fluctuations statistiques  $V$  et la vitesse caractéristique  $v_0$ ).

Nous observons que notre modèle reproduit de manière satisfaisante le comportement de la vitesse moyenne d'avancement de la fissure en fonction de la contrainte à la pointe du défaut. En particulier, nous mettons en évidence

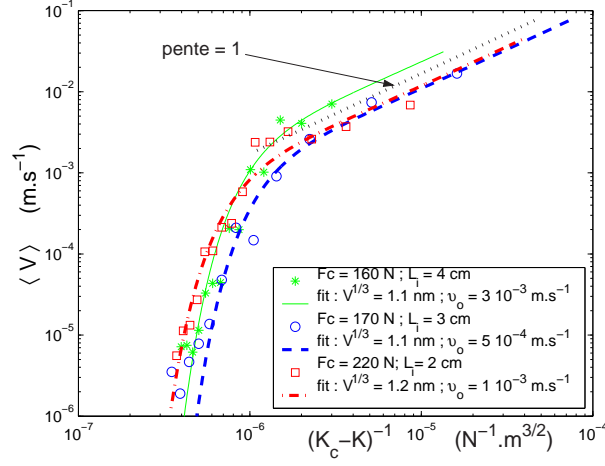


FIG. 5.12 – Vitesse moyenne d’avancement de la fissure  $\langle v \rangle$ , en fonction de l’inverse de l’écart entre le facteur d’intensité des contraintes  $K$  et le facteur d’intensité des contraintes critique  $K_C$ , pour différentes expériences de fluage. Les droites représentent les fits obtenus avec 2 paramètres libres, l’échelle volumique des fluctuations statistiques  $V$  et la vitesse caractéristique  $v_0$ .

les 2 comportements asymptotiques prédits par notre approche : près du seuil de rupture, la vitesse de croissance moyenne diverge comme l’inverse de l’écart au seuil de rupture  $v \propto (K_c - K)^{-1}$  et lorsqu’on s’éloigne du point critique de rupture la vitesse chute de manière exponentielle  $v \simeq v_0 e^{-U_c}$ .

De plus, on peut remarquer d’une part que le paramètre libre  $V$  représentant l’échelle volumique des fluctuations est quasiment constant, montrant une nouvelle fois que cette taille caractéristique est petite, à l’échelle nanométrique  $v = 1.1 \pm 0.1 \text{ nm}$ . D’autre part, l’autre paramètre libre nous donne la valeur de la vitesse caractéristique  $v_0$  séparant les 2 régimes de croissance du défaut. Nous trouvons une vitesse de l’ordre de  $v_0 \simeq 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  (ce paramètre semble dépendre de la longueur de fente initiale de la fissure).

Ces résultats apparaissent en très bon accord avec les résultats obtenus au chapitre précédent. Nous avons estimé cette vitesse caractéristique  $v_0$  à partir de l’analyse des temps de rupture moyens  $\langle \tau \rangle$ . Nous rappelons la prédiction des temps de rupture de cette approche présentée au chapitre précédent :  $\tau = \tau_0 e^{\frac{\Delta U}{k_B T}}$  avec  $\tau_0 = \frac{2\pi}{v_0} \sqrt{\frac{Y k_B T \lambda}{V} \frac{L_i}{K_i}}$ . Nous avons mesuré pour  $\tau_0$  un temps de l’ordre de 1s, ce qui donne alors une vitesse caractéristique  $v_0 \sim 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ . De plus, on peut remarquer que notre approche théorique prévoit une légère dépendance en fonction de la longueur de fente initiale  $L_i$ , (comme nous l’avons remarqué ci-dessus).

### 5.3.4 Temps d'attente

L'étude de la distribution des temps d'attente est en cours (notamment en examinant et comparant cette distribution des temps d'attente à celle de notre modèle numérique de réseau de ressorts).

Nous pouvons toutefois examiner les temps d'attente moyen  $\langle \tau \rangle$  mesurés pour l'ensemble des expériences réalisées, en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure. La moyenne est effectuée sur un même nombre de points, en moyennant sur des intervalles de  $K$  plus ou moins larges. Cette procédure peu entraîner une erreur importante sur la mesure des temps d'attente (voir commentaires du paragraphe 3.3.3 au chapitre 3).

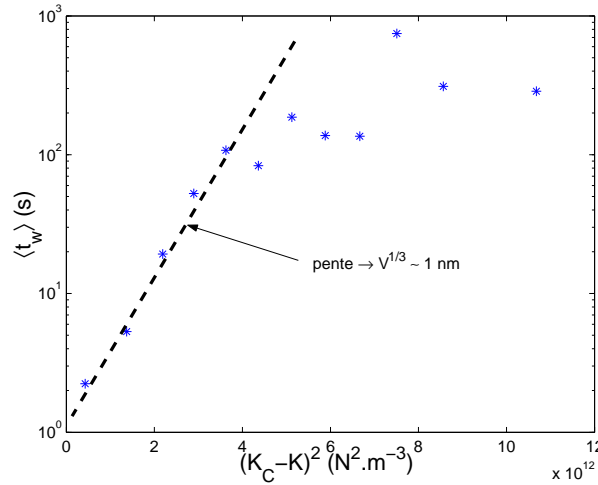


FIG. 5.13 – Temps d'attente moyen  $\langle t_w \rangle$  en fonction de la barrière d'énergie  $(K_c - K)^2$ . La pente de la droite en traits pointillés nous permet d'estimer l'échelle volumique  $V$  des fluctuations thermodynamiques.

Sur la figure 5.13 nous avons représenté les temps d'attente moyens en fonction du carré de l'écart entre le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et le seuil de rupture  $K_C$ .

Si la dynamique de croissance est thermiquement activé, le temps d'attente dans un piège, soit le temps de vie d'un état métastable, devrait être donné par une loi d'Arrhénius du type

$$\tau \propto e^{U_c} \quad \text{avec} \quad U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma)^2 V}{2Yk_B T} = \frac{(K_c - K)^2 V}{2Yk_B T \lambda}$$



Nous pouvons remarquer sur une bonne gamme de contraintes (proche du seuil de rupture) que le temps d'attente croît exponentiellement avec la barrière d'énergie relative  $U_c$ . Nous pouvons alors dans cette gamme estimer, encore une fois l'échelle volumique, des fluctuations statistiques de contraintes. Nous obtenons alors de manière cohérente avec les autres estimations, une taille nanométrique  $V^{1/3} \sim 1nm$ .

Cependant, comme nous avons pu l'observer précédemment (paragraphe 3.3.3 au chapitre 3), nous remarquons sur la figure 5.13 que les temps d'attente semblent saturer autour d'une valeur de  $10^3s$ . Nous pensons que cette saturation est peut-être liée à un problème de bruit lors de la détection des sauts et l'analyse d'images.

### 5.3.5 Description à une plus petite échelle et rugosité

Il est important de signaler qu'à des échelles plus petites (microscopiques), il apparaît beaucoup plus difficile de définir une dynamique de croissance par sauts, comme le montre l'image suivante fig.5.14 :

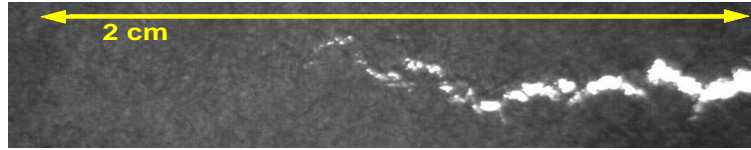


FIG. 5.14 – Image de la pointe d'une fissure durant une expérience de fluage sur un échantillon de papier. On observe à la pointe du défaut des éléments (microcracks) qui ne semblent pas être connectés.

Les événements de sauts que nous détectons semblent alors correspondre à des microfractures nucléées en pointe du défaut.

E. Bouchaud [76] propose un scénario de croissance d'une fissure par nucléation, croissance puis coalescence de microfractures en pointe du défaut principal, illustré sur la figure 5.15. Cette dynamique d'endommagement a été observée à différentes échelles pour divers matériaux (la dizaine de nanomètres dans le verre jusqu'au micromètre dans les métaux) [75] et permet de comprendre les différents exposants de rugosité mesurés à différentes échelles [31].

Il est effectivement remarquable de pouvoir observer à des échelles aussi différentes une dynamique d'endommagement similaire sur des matériaux qui ont des propriétés mécaniques très différentes. En effet, nous pouvons également observer sur nos échantillons de papier une dynamique d'endommagement fort semblable, comme le montre les figures suivantes 5.16 :

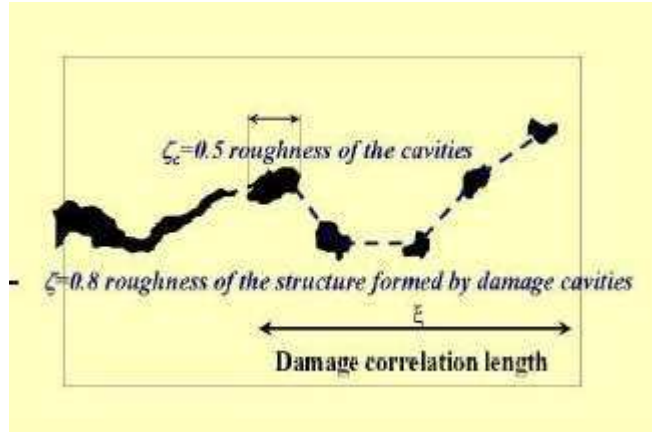


FIG. 5.15 – Scénario décrivant l’avancement d’une fissure proposé par E. Bouchaud [76] : nucléation, croissance puis coalescence de microfractures en pointe du défaut principal.

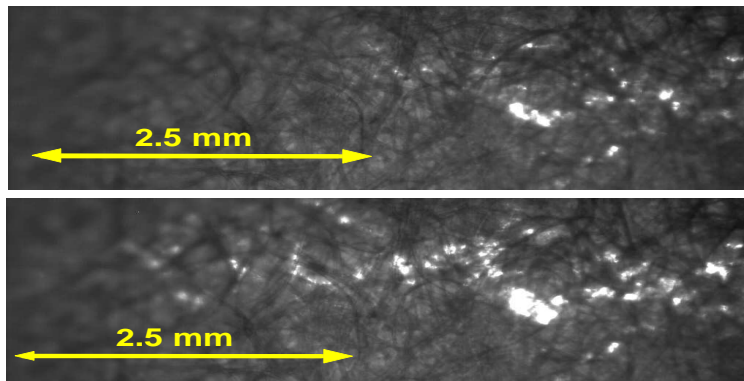


FIG. 5.16 – Images de la pointe d’une fissure réalisées à l’aide d’un objectif de microscope durant une expérience de fluage sur un échantillon de papier. On observe la nucléation de micro-fractures, leur croissance puis leur coalescence.

Il faut signaler que notre description de la dynamique apparaît incomplète. En effet, nous ne traitons pas l’aspect fortement sinueux et rugueux de la croissance de la fissure. Aussi, en collaboration avec S. Roux de l’équipe "Signaux, Systèmes et Physique" de notre laboratoire, nous sommes en train d’étudier le "caractère monofractal" de la ligne de fracture sur nos échantillons de papier et d’examiner l’exposant de rugosité en fonction de la position de la fissure. Cette analyse va nous permettre de mieux comprendre

si le chemin emprunté par la fissure est un effet dynamique ou simplement un effet lié au désordre du matériau. Une étude préliminaire de la rugosité de la ligne de fracture sur nos échantillons de papier semble montrer un exposant de rugosité  $\zeta \simeq 0.6$ , qui ne dépend pas de la position de la fissure sur une assez large gamme d'échelles ( $\leq 2$  ordres de grandeur). Ce résultat préliminaire semble être en accord avec d'autres mesures de rugosité sur des échantillons de papier [24] et une étude numérique récente [77].

## 5.4 Comparaison aux résultats numériques

Les prédictions de notre approche théoriques peuvent être également vérifiées en examinant la dynamique de croissance d'une fissure dans notre modèle numérique de réseau de ressorts.

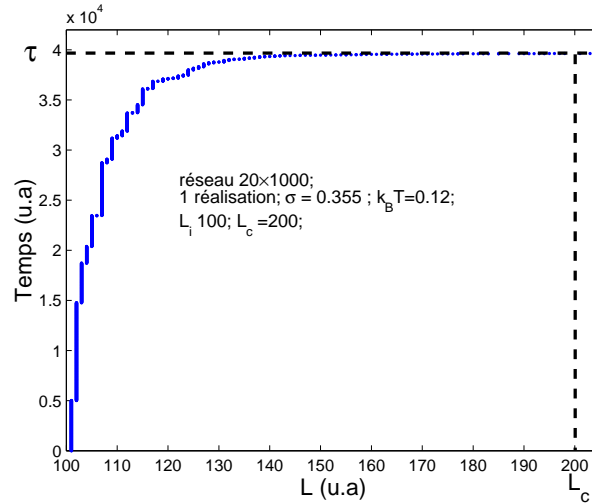


FIG. 5.17 – Evolution temporelle d'une fissure dans une bande élastique discrète (réseau de ressorts  $20 \times 1000$ ) soumise à une contrainte constante, avec une température  $k_B T$ .

La figure 5.17 montre l'évolution temporelle d'une fissure de longueur initiale  $L_i = 100$  jusqu'à une longueur critique  $L_c = 200$ , dans un réseau de ressorts sous forme de bande  $20 \times 1000$ , soumis à une contrainte constante  $\sigma = 0.355$  avec un bruit thermique  $k_B T = 0.12$ .

Nous avons déjà remarqué que les courbes de croissance d'un défaut dans nos échantillons numériques ressemblent de façon remarquable aux courbes de croissance obtenues lors d'expériences de fluage sur des feuilles de papier.

On observe effectivement que cette dynamique est intermittente la fissure avance par sauts puis peut rester piégée pendant un temps d'attente  $t_w$ .

### 5.4.1 Saut de longueurs

Cependant, on observe que la fissure avance en ne cassant qu'un seul ressort à la pointe de la fissure, soit en effectuant un saut correspondant à 1 pas du réseau (même sur de grands réseaux comme le montre la figure 5.17 bande  $20 \times 1000$ ).

Nous avons évoqué précédemment, que la discrétisation était trop importante, et qu'en travaillant sur des réseaux plus grands, nous pourrions observer différentes tailles de sauts. En fait, nous pensons plutôt que la procédure que nous avons choisie dans ce modèle numérique, ne nous permet pas d'observer toute une distribution de tailles de sauts, puisque à chaque réalisation du bruit, toute l'énergie à disposition (le surplus d'énergie dû aux fluctuations et l'énergie élastique libérée lors de l'avancement) n'est utilisée que pour un seul pas de temps (cela revient à dissiper cette énergie) et ne permet donc pas à la fissure de franchir de nouvelles barrières.

Toutefois, pour observer des sauts de différentes tailles, nous pourrions (et c'est le cas expérimentalement) fixer une fenêtre temporelle d'observation correspondant par exemple à 10 réalisations du bruit.

### 5.4.2 Temps d'attente

En revanche, nous pouvons mesurer toute une distribution de temps d'attente. Cette analyse en cours, semble montrer des résultats cohérents avec les résultats expérimentaux.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donc montré qu'un mécanisme de croissance par sauts, selon un processus d'activation thermique, permet de bien décrire aussi bien qualitativement que quantitativement, la dynamique fortement intermittente de croissance de la fissure et de reproduire la distribution des sauts de la fissure. Nos prédictions apparaissent effectivement en très bon accord avec les observations expérimentales, montrant que la forme fonctionnelle de la distribution des tailles de sauts est caractéristique de l'approche d'un point critique.

De plus, notre approche théorique met en évidence le rôle des fluctuations statistiques de contraintes qui permettent de franchir des barrières d'énergie

dues à un effet de piégeage lié au caractère discret de la plaque élastique (échelle mésoscopique de discrétisation correspondant à la taille des fibres  $d_f$  pour les feuilles de papier).

Cependant, il faut signaler que dans notre modèle l'échelle caractéristique de discrétisation  $\lambda$  et la taille caractéristique  $V^{1/3}$  à laquelle les fluctuations agissent et provoquent des événements de rupture (à l'échelle  $\lambda$  justement) sont les mêmes. Or, expérimentalement nous obtenons que les fluctuations de contraintes sont pertinentes à une échelle nanométrique, alors que l'échelle de discrétisation du matériau est de l'ordre de la taille des fibres i.e micro-métrique.

Pour obtenir une échelle volumique des fluctuations statistiques plus grande, il faudrait d'une part introduire dans notre approche théorique un mécanisme dissipatif beaucoup plus réaliste et d'autre part prendre en compte l'effet du désordre sur les propriétés du matériau.

Enfin, nous pensons que ce type d'approche pourrait également s'appliquer à tout matériau élastique comportant une échelle de discrétisation mésoscopique. À titre d'exemple, il serait intéressant d'examiner si cette modélisation permet de décrire les sauts de croissance de fissure observés dans la dynamique de rupture des polymères semi-cristallins (ces matériaux offrent une super-structure lamellaire qui peut être à des échelles micrométriques).

# Chapitre 6

## Conclusion et perspectives

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Résultats</b>	<b>. . . . .156</b>
<b>6.2</b>	<b>Questions ouvertes et perspectives</b>	<b>. . . . .158</b>

---

Notre étude à la fois expérimentale et théorique (basée sur des simulations numériques) a permis de clarifier le rôle des fluctuations statistiques de contraintes dans la dynamique de rupture lente sous-critique.

Nous avons effectivement montré qu'un modèle simple d'activation thermique pouvait décrire de manière remarquable la croissance lente d'une fissure sous contrainte que nous avons observée sur des matériaux (en particulier des feuilles de papier) présentant une structure discrète à une échelle mésoscopique (taille des fibres).

Dans un premier temps, nous allons rappeler les principaux résultats obtenus, puis nous évoquerons les différentes pistes d'études envisagées.

## 6.1 Résultats

D'une part, nous avons pu mettre en évidence en réalisant des expériences de fluages sur divers matériaux, que la dynamique d'endommagement sous-critique offre un comportement riche et complexe. Nous avons pu observer sur des échantillons de papier comportant un défaut macroscopique initial, une dynamique de croissance d'une fissure progressive très irrégulière : on observe des temps d'attente pendant lesquels la fissure reste piégée puis, soudainement la fissure effectue un saut de longueur. La fissure avance donc par sauts depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique de rupture  $L_C$  où l'échantillon casse soudainement.

Une analyse statistique nous a permis d'abord de caractériser la dynamique moyenne de croissance du défaut, qui suit une loi exponentielle déterminée par 2 paramètres, le temps de vie  $\tau$  et une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ . La mesure (d'une borne supérieure) de l'énergie de surface nécessaire pour ouvrir la fissure, nous permet de montrer que cette longueur critique de rupture  $L_C$  est au moins 2 fois plus grande que la longueur critique prédite par Griffith  $L_G$ .

Ensuite, cette approche statistique nous a permis de caractériser la dynamique irrégulière du processus de rupture en établissant notamment la distribution des tailles de sauts. Cette distribution offre une forme singulière : une loi de puissance tronquée par une queue exponentielle qui évolue en fonction de la contrainte à la pointe de la fissure et de la distance au seuil de rupture  $\sigma_c$ .

De plus, des expériences de fluage à haute température ont permis de mettre en évidence l'effet dramatique de la température sur les temps de rupture de nos échantillons. Enfin, en réalisant également des expériences sur divers matériaux, nous montrons que la structure fibreuse des échantillons de papier, tissus, et polycarbonate joue un rôle crucial dans cette dynamique d'endommagement.

La contrainte à la pointe du défaut  $\sigma_p$  que nous estimons grâce au facteur d'intensité des contraintes  $K \simeq \sigma\sqrt{\lambda}$  à l'échelle discrète  $\lambda$  (qui correspond à la taille des fibres pour nos feuilles de papier), apparaît comme un paramètre de contrôle de cette dynamique de rupture (et en particulier l'écart au seuil de rupture  $\sigma_p - \sigma_c$ ). La ténacité ou le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_C \simeq \sigma\sqrt{L_C}$  permet de définir le seuil de rupture de nos échantillons.

D'autre part, nous avons développé en parallèle une approche théorique, basée sur des simulations numériques d'un réseau de ressorts bidimensionnel (modélisant une plaque élastique discrète). Nous proposons un mécanisme de croissance selon un processus d'activation thermique où les fluctuations de

contraintes permettent de franchir un seuil de rupture par sauts irréversibles. Un des points clés de cette approche est la nature gaussienne des fluctuations statistiques de contraintes due au caractère élastique du système considéré.

Dans un premier temps, pour décrire la dynamique d'avancement moyenne, nous avons effectué une hypothèse très forte sur cette dynamique d'avancement : nous supposons que la vitesse moyenne de croissance est proportionnelle à la probabilité d'avoir une fluctuation suffisante pour atteindre le seuil de rupture  $\sigma_c$ . Cette hypothèse nous permet alors d'obtenir l'évolution temporelle moyenne de la fissure, décrivant une approche exponentielle du temps de rupture moyen  $\langle \tau \rangle$ .

Ensuite, à partir de l'examen de l'énergie potentielle dans notre modèle numérique (réseau de ressorts), nous observons que ce potentiel comporte un ensemble de barrières d'énergie liées à un effet de piégeage dû au caractère discret du réseau élastique. Nous proposons alors un mécanisme de croissance par sauts où les fluctuations de contraintes permettent de franchir ces barrières d'énergie. Nous supposons un mécanisme de dissipation très important pour permettre de nouveau (après la réalisation d'un saut), l'arrêt et le piégeage de la fissure dans un état métastable. Cette approche nous permet alors de déterminer la distribution des sauts de longueurs de fissure.

Les différentes prédictions analytiques apparaissent en excellent accord statistique avec les résultats expérimentaux, aussi bien pour la dynamique moyenne d'avancement et les paramètres la caractérisant, que pour la distribution des tailles de saut à l'approche du seuil de rupture. Nous mettons en évidence que cette dynamique d'avancement offre des caractéristiques de l'approche d'un point critique (ici le seuil de rupture). Nous montrons également que les divers modèles [41, 43, 44, 45], utilisant le concept énergétique établi par Griffith, ne peuvent pas décrire cette dynamique de rupture, ni prédire le temps de vie de nos échantillons. Ces résultats montrent justement l'importance de l'irréversibilité du processus de rupture et le rôle déterminant de la structure discrète du matériau.

Enfin, cette approche apparaît effectivement séduisante puisqu'à partir d'hypothèses simples (mais fortes) nous arrivons à décrire de façon remarquable une dynamique riche et complexe. De plus il est important de remarquer que cette description thermodynamique de la rupture dans un matériau élastique hétérogène se rattache à une problématique plus générale sur le comportement dynamique de systèmes élastiques désordonnés [4].



## 6.2 Questions ouvertes et perspectives

Si notre approche offre de nouvelles perspectives quant à la description de la rupture comme un processus d'activation thermique, mettant en évidence l'importance du rôle des fluctuations statistiques de contraintes, il reste cependant encore de nombreux points à éclaircir, et des questions à élucider.

Dans un premier temps, il est nécessaire de terminer l'analyse des temps d'attente aussi bien expérimentalement que numériquement. Il faut notamment examiner si lorsque nous sommes loin du seuil de rupture (donc les temps d'attente en moyenne devraient être longs) nous détectons ou pas des événements parasites (i.e de faux événements de sauts) qui pourraient éventuellement modifier les distributions des temps d'attente et des tailles de sauts! On peut remarquer que l'analyse des distributions (distribution simple et distribution cumulée) des tailles de sauts en laissant l'exposant de la loi de puissance comme paramètre libre, montre un exposant plus faible que  $3/2$ , de l'ordre de  $1.3$  [59].

Pour aller plus loin, il est nécessaire d'introduire dans notre description d'une part un mécanisme dissipatif plus réaliste et de prendre en compte l'effet du désordre sur les propriétés du matériau. Ainsi, nous obtiendrons une échelle volumique des fluctuations statistiques  $V$  plus grande, ce qui nous permettrait de relier alors cette taille caractéristique microscopique à l'échelle à laquelle les événements de rupture se produisent.

En effet, le mécanisme de dissipation que nous proposons permettant de piéger la fissure, sur-estime complètement un processus de dissipation réaliste. ( Nous pourrions par exemple au lieu de considérer que la vitesse de la fissure pour effectuer un saut  $\lambda$  est constante, supposer que cette vitesse dépend de l'amplitude des fluctuations d'énergie. Ceci conduirait probablement à une modification de l'exposant de la loi de puissance obtenue pour la distribution des tailles de sauts.)

D'autre part, le désordre du matériau devrait réduire de manière effective la barrière d'énergie à franchir et donc permettre la rupture pour des échelles de  $V$  plus importantes. Nous sommes en train d'examiner numériquement le rôle du désordre dans notre modèle numérique (distribution aléatoire des seuils de rupture des ressorts). On peut évoquer les travaux en cours de Stéphanie Deschanel qui effectue sa thèse entre le laboratoire GEMPPM de l'INSA de Lyon et le laboratoire de physique de l'ENS-Lyon. Son travail de thèse consiste justement à examiner le rôle du désordre sur le temps de vie de mousses polymères (où elle est capable de contrôler le niveau de désordre i.e taille et distribution des pores) sous contraintes.

Nous avons pu remarquer que notre modèle ne peut décrire la dynamique d'avancement moyenne d'une fissure dans les films de polycarbonate. Il serait

donc très intéressant d'examiner et comparer à nos résultats, les prédictions établies sur la dynamique lente de rupture, à partir de l'examen des propriétés rhéologiques des matériaux. Nous avons notamment en introduction cité les travaux de Chudnovsky et Shulkin [34] qui proposent une vitesse d'avancement du type  $v \propto \frac{K^4}{K_C^2 - K^2}$  où  $K$  est le facteur d'intensité des contraintes et  $K_C$  la ténacité. Cette forme montre également une divergence de la vitesse à l'approche du seuil de rupture.

Enfin, nous envisageons une étude détaillée de la ligne de fracture, qui nous permettra de mieux comprendre cette dynamique fort complexe.



# Annexe A

## Croissance lente et irréversible thermiquement activée

### A.1 Obtention de l'équation différentielle d'évolution de la fissure

#### A.1.1 Fluctuations statistiques de contraintes

Nous considérons que les *fluctuations thermiques* provoquent des *fluctuations de contraintes* à une échelle volumique  $V$  dans un matériau élastique, de *distribution gaussienne* :

$$P(\sigma_f) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Delta\sigma\rangle^2}} \exp\left[-\frac{(\sigma_f - \sigma)^2}{2\langle\Delta\sigma_f\rangle^2}\right] \quad (\text{A.1})$$

où  $\langle\Delta\sigma_f\rangle^2 = k_B T Y / V$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température, et  $Y$  le module d'Young de la plaque élastique.

#### A.1.2 Processus d'endommagement irréversible

Nous supposons que le *processus d'endommagement est irréversible*. La vitesse d'avancement de la fissure  $v$  est proportionnelle à la probabilité d'obtenir des fluctuations de contraintes  $\mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c)$  supérieures au seuil de rupture  $\sigma_c$ .

$$v = v_0 \mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) = v_0 \text{erfc}\left(\sqrt{U_c}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{avec} \quad v_0 = \frac{\lambda}{\theta_0} \quad \text{et} \quad U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Yk_B T \lambda}$$

où  $v_0$  est une vitesse caractéristique  $v_0 = \frac{\lambda}{\theta_0}$  rapport de l'échelle de longueur discrète  $\lambda$  (taille du réseau) et d'un temps caractéristique  $\theta_0$  (inverse d'une fréquence de vibration).

Nous supposons que les fluctuations de température  $k_B T$  sont petites telles que  $U_c \gg 1$ . Nous pouvons alors effectuer un développement asymptotique de la fonction  $\text{erfc}(\sqrt{U_c})$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{x^{2k+1}} + R_n \right]$$

$$\text{où} \quad \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \prod_{i=1}^n (2i-1) \quad \text{et} \quad |R_n| < \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{x^{2n+1}}$$

On obtient alors pour la vitesse d'avancement de la fissure :

$$v = v_0 \mathcal{P}(\sigma_f > \sigma_c) \simeq \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-U_c}}{U_c} \quad (\text{A.3})$$

Soit l'équation différentielle d'évolution de la fissure :

$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{(K_C - K(L))^2 V}{2Yk_B T \lambda}}}{\frac{(K_C - K(L))^2 V}{2Yk_B T \lambda}} \quad (\text{A.4})$$

où  $K(L)$  est le facteur d'intensité des contraintes mesurant l'amplitude de la divergence de la contrainte à la pointe du défaut  $\sigma_f = \frac{K}{\sqrt{\lambda}}$  à l'échelle discrète  $\lambda$ . La dépendance non-linéaire de  $K$  avec  $L$ ,  $K \sim \sigma \sqrt{L}$  nous oblige à de nouvelles approximations pour résoudre cette équation et obtenir une expression analytique simple décrivant l'évolution temporelle de la fissure.

## A.2 Résolution de l'équation

### A.2.1 Approximations et reformulation de l'équation

Nous introduisons une longueur de fissure réduite  $\phi \equiv \frac{L-L_i}{L_C-L_i}$  pour mesurer l'évolution de la fente, lorsqu'elle croît depuis sa longueur initiale  $L_i$  où ( $\phi = 0$ ), jusqu'à sa valeur critique  $L_C$  où ( $\phi = 1$ ), lorsque la rupture est brutale. On développe le facteur d'intensité de contrainte en fonction de  $\phi$  en ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$K \simeq \sigma \sqrt{L} = \sigma \sqrt{L_i + (L_C - L_i)\phi} \simeq K_i \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_C}{L_i} - 1 \right) \phi \right]$$

Cette approximation est raisonnable puisqu'elle n'entraîne qu'une erreur de 2% sur  $K$  tant que  $2\phi < 1$  et  $L_C < 2L_i$ .

On peut alors écrire  $(K_C - K)^2 \simeq (K_C - K_i)^2 - K_i(K_C - K_i)\frac{L_C - L_i}{L_i}\phi$

Ensuite, on remplace  $K$  par  $K_i$  dans le pré-facteur de l'exponentielle ; nous commettons alors une erreur d'ordre logarithmique conduisant à une légère sous-estimation de la vitesse de la fissure.

Ces diverses approximations nous permettent d'obtenir une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre pour la variable  $\phi$ , longueur réduite :

$$\frac{d\phi}{dt} = Ae^{B\phi} \quad (\text{A.5})$$

avec

$$A = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}(L_C - L_i)} \frac{e^{-\frac{(K_C - K_i)^2 V}{2Yk_B T \lambda}}}{\sqrt{\frac{(K_C - K_i)^2 V}{2Yk_B T \lambda}}}$$

et

$$B = \frac{L_C - L_i}{L_i} \frac{K_i (K_C - K_i) V}{2Yk_B T \lambda}$$

### A.2.2 Evolution temporelle de la fissure

On peut résoudre très aisément l'équation différentielle A.5 et obtenir une expression simple décrivant l'évolution temporelle de la fissure :

$$t = \frac{1}{AB} (1 - e^{-B\phi}) \quad (\text{A.6})$$

La fissure croît depuis sa longueur initiale  $L_i$  où  $\phi = 0$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$  où  $\phi = 1$ , la rupture étant alors brutale. Le temps de vie  $\tau$  de l'échantillon correspond à ce moment de rupture rapide :

$$\tau \equiv t(\phi = 1) = \frac{1}{AB} (1 - e^{-B}) \simeq \frac{1}{AB} \quad (\text{A.7})$$

où nous considérons, pour la dernière approximation, les fluctuations de température  $k_B T$  petites telles que  $B \gg 1$ .

On peut enfin décrire la croissance lente de la fissure depuis sa longueur initiale  $L_i$  jusqu'à sa longueur critique  $L_C$  et mettre en évidence une approche exponentielle du temps de rupture  $\tau$  avec une longueur caractéristique de croissance  $\ell_c$  :

$$t = \tau \left[ 1 - e^{-\frac{L - L_i}{\ell_c}} \right] \quad (\text{A.8})$$

où  $\tau$  correspond au temps de rupture de l'échantillon :

$$\tau = \tau_0 \exp \left[ \frac{(K_C - K_i)^2 V}{2Yk_B T \lambda} \right] \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{v_0} \sqrt{\frac{Yk_B T \lambda}{V}} \frac{L_i}{K_i} \quad (\text{A.9})$$

et  $\ell_C$  représente une longueur caractéristique de croissance :

$$\ell_C = \frac{2Yk_B T \lambda}{V} \frac{L_i}{K_i(K_C - K_i)} \quad (\text{A.10})$$

Nous pouvons reformuler le temps de rupture  $\tau$  et la longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ , (afin d'obtenir des expressions générales ne dépendant pas de notre choix d'utiliser le facteur d'intensité des contraintes pour calculer la contrainte à la pointe du défaut) :

$\tau$  représente le temps de vie de l'échantillon :

$$\tau = \tau_0 \exp \left[ \frac{(\sigma_c - \sigma_i)^2 V}{2Yk_B T} \right] \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{v_0} \sqrt{\frac{Yk_B T}{V}} \frac{L_i}{\sigma_i} \quad (\text{A.11})$$

et  $\zeta$  représente une longueur caractéristique de croissance :

$$\zeta = \frac{2Yk_B T}{V} \frac{L_i}{\sigma_i(\sigma_c - \sigma_i)} \quad (\text{A.12})$$

$\sigma_i$  est la contrainte à la pointe du défaut initial.  
 $\sigma_c$  correspond au seuil critique de rupture.

## Annexe B

# Croissance lente par sauts thermiquement activés

### B.1 Mécanisme de croissance par sauts

Nous proposons un mécanisme de croissance par sauts irréversibles selon un processus d'activation thermique dans un paysage énergétique comportant un ensemble d'états métastables au delà de la longueur de Griffith  $L_G$  et jusqu'à une longueur critique  $L_C$ .

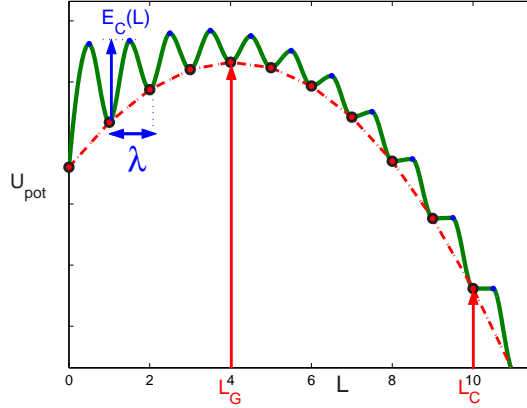


FIG. B.1 – Schéma de l'énergie potentielle à l'équilibre (traits pointillés) du réseau de ressorts soumis à une contrainte constante  $\sigma$ , et des barrières d'énergie  $E_C(L)$  (trait continu) à franchir dues à l'échelle de discrétisation  $\lambda$  du réseau, en fonction de la longueur de la fissure  $L$ . On note la longueur de Griffith  $L_G$  correspondant au maximum de l'énergie potentielle à l'équilibre, et la longueur critique  $L_C$  où la barrière d'énergie à franchir est nulle  $E_C(L_C) = 0$ .



Les fluctuations de contraintes permettent de franchir les barrières d'énergie  $E_C(L)$ . Ce paysage énergétique est représenté sur la figure B.1 et a été obtenu à partir de l'examen de l'énergie potentielle sur une simulation numérique d'un réseau de ressorts, modélisant un milieu élastique discret en déformation anti-plane. Ce mécanisme de croissance nous permet de décrire l'avancement de la fissure et prédire la distribution des sauts de longueurs de fissure.

## B.2 Obtention de la distribution $P_s(s)$ des tailles de sauts

### B.2.1 Vitesse moyenne d'avancement de la fissure

Nous pouvons exprimer la vitesse moyenne d'avancement de la fissure de 2 manières différentes :

1. *processus d'endommagement irréversible*

$$v = v_0 \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) = v_0 \int_{U_c}^{\infty} \frac{e^{-U_f} dU_f}{\sqrt{\pi U_f}} \quad (\text{B.1})$$

avec  $U_f = \frac{(\sigma_f - \sigma_m)^2 V}{2Yk_B T}$  et  $U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Yk_B T}$

2. *rapport de la taille moyenne d'un saut  $\langle s \rangle$  sur le temps de vie d'un état métastable  $\langle t_w \rangle$*

$$v = \frac{\langle s \rangle}{\langle t_w \rangle} = \frac{\int_{\lambda}^{\infty} s P_s(s) ds}{\langle t_w \rangle} \quad (\text{B.2})$$

### B.2.2 Temps de vie d'un état métastable $\langle t_w \rangle$

La fissure de longueur  $L$  reste piégée dans un état métastable avec une barrière d'énergie  $U_c$  pendant un temps moyen  $\langle t_w \rangle$  :

$$\langle t_w \rangle = \tau_0 e^{U_c} \quad \text{avec} \quad U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Yk_B T}$$

### B.2.3 Taille des sauts $s$ dues aux fluctuations d'énergie $E_f$

Sous l'effet des fluctuations de contraintes  $\sigma_f$  et donc d'énergie  $E_f$  dues au bruit thermique, la fissure va pouvoir franchir un nombre  $n$  de barrières d'énergie et donc effectuer un saut de longueur  $s$  :

$$s = n\lambda = \frac{E_f(\sigma_m)}{E_c(L)}\lambda = \frac{U_f}{U_c}\lambda$$

avec 
$$U_f = \frac{(\sigma_f - \sigma_m)^2 V}{2Yk_B T}$$

### B.2.4 Distribution des tailles de sauts $P_s(s)$

On peut donc reformuler l'expression B.1 de la vitesse moyenne (changement de variable  $s \rightarrow U_f$ ) en utilisant les expressions suivantes :  $s = \frac{U_f}{U_c}\lambda$  soit  $ds = \frac{\lambda}{U_c}dU_f$ , et  $s(U_c) = \lambda$ , et introduisant une longueur caractéristique  $\xi = \frac{\lambda}{U_c}$  ; On trouve alors :

$$v = v_0 \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-s/\xi}}{\sqrt{s}} ds$$

Par identification avec l'autre expression de la vitesse moyenne B.2, soit  $v = \frac{\int_{\lambda}^{\infty} s P_s(s) ds}{\tau_0 e^{U_c}}$ , on peut obtenir l'expression de la distribution des tailles de sauts  $s$  durant le processus d'endommagement :

$$P_s(s) = v_0 \tau_0 \frac{e^{U_c}}{\sqrt{\pi\xi}} s^{-3/2} e^{-s/\xi}$$

où 
$$\xi = \frac{\lambda}{U_c} = \frac{\lambda 2Yk_B T}{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}$$

La condition de normalisation donne :

$$\int_{\lambda}^{\infty} P_s(s) ds = \frac{2v_0 \tau_0}{\lambda \sqrt{\pi}} \sqrt{U_c} \left[ 1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) \right] = 1$$

Nous pouvons enfin écrire la distribution des sauts de longueurs de la fissure  $P_s(s)$  :

$$P_s(s) = \frac{e^{U_c}}{\left[ 1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) \right]} \sqrt{\lambda} s^{-3/2} e^{-s/\xi} \quad (\text{B.3})$$

### B.2.5 Taille moyenne $\langle s \rangle$ et variance des sauts $\langle s^2 \rangle$

A partir de l'expression de la distribution des tailles de sauts B.3, on peut estimer d'une part la taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle = \int_{\lambda}^{\infty} s P_s(s) ds$  durant le processus d'endommagement :

$$\langle s \rangle = \frac{\lambda}{2U_c} \frac{\sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]} \quad (\text{B.4})$$

D'autre part, la variance des sauts  $\langle s^2 \rangle = \int_{\lambda}^{\infty} s^2 P_s(s) ds$  s'écrit :

$$\langle s^2 \rangle = \frac{\lambda^2}{4U_c^2} \frac{2U_c + \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]} \quad (\text{B.5})$$

### B.2.6 Vitesse moyenne d'avancement de la fissure $v$

On peut également déterminer la vitesse moyenne d'avancement de la fissure :

$$v = \frac{\langle s \rangle}{\langle t_w \rangle} = \frac{\lambda}{2U_c \tau_0} \frac{\sqrt{\pi U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})}{[1 - \sqrt{\pi U_c} e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]} \quad (\text{B.6})$$

## B.3 Comportements asymptotiques

On rappelle les limites asymptotiques suivantes :

*Quand  $x \rightarrow \infty$  :*

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{x^{2k+1}} + R_n \right]$$

où :

$$\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^k} (2k-1)!! = \frac{\sqrt{\pi}}{2^k} \prod_{i=1}^k (2i-1) \quad \text{et} \quad |R_n| < \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{x^{2n+1}}$$

*Quand  $x \rightarrow 0$  :*

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}$$

– *Loin du seuil de rupture :*

$$U_c \rightarrow \infty \text{ d'où } [1 - \sqrt{\pi} U_c e^{U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})] \rightarrow \frac{1}{2U_c}$$

$$\begin{aligned} P_s(s) &\rightarrow \sqrt{\lambda} U_c e^{U_c} s^{-3/2} e^{-U_c s/\lambda} \\ \langle s \rangle &\rightarrow \lambda \\ \langle s^2 \rangle &\rightarrow \lambda^2 \\ v &\rightarrow \frac{\lambda}{\vartheta_0} e^{-U_c} \end{aligned}$$

– *Proche du seuil de rupture :*

$$U_c \rightarrow 0 \text{ d'où } \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) \rightarrow 1 - \frac{2\sqrt{U_c}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\begin{aligned} P_s(s) &\rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{2} s^{-3/2} \\ \langle s \rangle &\rightarrow \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2} U_c^{-1/2} \\ \langle s^2 \rangle &\rightarrow \frac{\lambda^2\sqrt{\pi}}{4} U_c^{-3/2} \\ v &\rightarrow \frac{\lambda}{\vartheta_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} U_c^{-1/2} \end{aligned}$$

## B.4 Comparaison aux résultats expérimentaux

La figure B.2 rappelle les distributions des longueurs de sauts de fissure pour différentes valeurs du facteur d'intensité des contraintes (estimant la contrainte à la pointe du défaut à l'échelle discrète  $\lambda$ ,  $\sigma = K/\sqrt{\lambda}$ ) pour l'ensemble des expériences de fluage réalisées sur de échantillons de papier.

Nous remarquons la longueur de coupure  $\ell_m$  qui correspond à la résolution de notre détection, qui est au pire de l'ordre de  $150\mu m$ . Les distributions sont normalisées par rapport aux données disponibles et donc la coupure  $\ell_m$  joue un rôle important. Aussi, pour mettre à l'épreuve les prédictions de notre modèle, il est nécessaire de prendre en compte cette longueur de coupure  $\ell_m$ . Nous devons alors reformuler la distribution de probabilité des tailles de sauts  $P_s^{\ell_m}(s)$ .

La condition de normalisation s'écrit alors, avec cette longueur de coupure  $\ell_m$  :

$$\int_{\ell_m}^{\infty} P_s^{\ell_m}(s) ds = 1$$

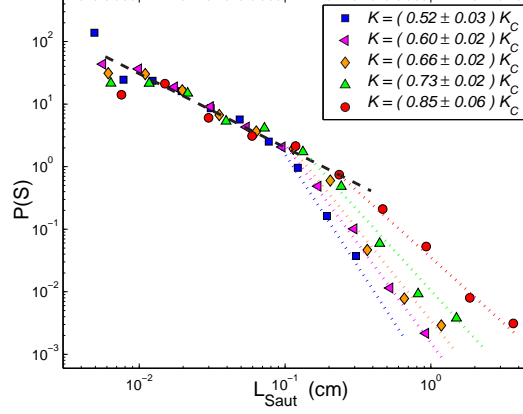


FIG. B.2 – Distribution de probabilité des tailles de sauts pour différentes valeurs du facteurs d'intensité des contraintes  $K$ . Les droites en traits discontinus et pointillés servent de guides pour les yeux.

et nous permet de déterminer la distribution  $P_s^{\ell_m}(s)$  :

$$P_s^{\ell_m}(s) = \frac{\sqrt{\ell_m} e^{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}}}{2 \left[ 1 - \sqrt{\pi U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} e^{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}}) \right]} \frac{e^{-U_c s / \lambda}}{s^{3/2}} \quad (\text{B.7})$$

avec  $U_c = \frac{(\sigma_c - \sigma_m)^2 V}{2Y k_B T} = \frac{(K_C - K_m)^2 V}{2Y k_B T \lambda}$

Il faut alors signaler que cette condition de normalisation réduit en fait notre modélisation à un unique paramètre, le rapport  $\frac{V}{\lambda^2}$ . Cette remarque est d'une grande importance notamment pour réaliser les ajustements des données.

On peut également donner les prédictions de la taille moyenne des sauts  $\langle s \rangle = \int_{\ell_m}^{\infty} s P_s^{\ell_m}(s) ds$  et de la variance des sauts  $\langle s^2 \rangle = \int_{\ell_m}^{\infty} s^2 P_s^{\ell_m}(s) ds$  en tenant compte de cette longueur de coupure  $\ell_m$  :

$$\langle s \rangle_{\ell_m} = \frac{\ell_m}{2U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} \frac{\sqrt{\pi U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} e^{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}})}{\left[ 1 - \sqrt{\pi U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} e^{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}}) \right]} \quad (\text{B.8})$$

$$\langle s^2 \rangle_{\ell_m} = \frac{\ell_m^2}{4(U_c \frac{\ell_m}{\lambda})^2} \frac{2U_c \frac{\ell_m}{\lambda} + \sqrt{\pi U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} e^{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}})}{\left[ 1 - \sqrt{\pi U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} e^{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c \frac{\ell_m}{\lambda}}) \right]} \quad (\text{B.9})$$

# Annexe C

## Publications

1. *Sub-critical statistics in rupture of fibrous materials : model and experiments.*  
S. Santucci, L. Vanel, and S. Ciliberto, Phys. Rev. Lett. 93, 095505 (2004)
2. *Thermal activation of rupture and slow crack growth in a model of homogeneous brittle materials.*  
S. Santucci, L. Vanel, A. Guarino, R. Scorretti, and S. Ciliberto, Europhys. Lett. 62 (3), p. 320-326 (2003).
3. *Thermally activated rupture in homogeneous brittle materials.*  
S. Santucci, L. Vanel, A. Guarino, R. Scorretti, and S. Ciliberto, Russ. J. Phys. Chem. 77, suppl. 1, p. S176 (2003).
4. *Failure time of elastic materials submitted to a constant load.*  
R. Scorretti, S. Santucci, A. Guarino, L. Vanel, and S. Ciliberto, Mater. Phys. Mech. 6, p. 67-70 (2003).



# Subcritical Statistics in Rupture of Fibrous Materials: Experiments and Model

Stéphane Santucci, Loïc Vanel, and Sergio Ciliberto

*Laboratoire de physique, CNRS UMR 5672, Ecole Normale Supérieure de Lyon,  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France*

(Received 20 May 2004; published 26 August 2004)

We study experimentally the slow growth of a single crack in a fibrous material and observe stepwise growth dynamics. We model the material as a lattice where the crack is pinned by elastic traps and grows due to thermally activated stress fluctuations. In agreement with experimental data we find that the distribution of step sizes follows subcritical point statistics with a power law (exponent  $3/2$ ) and a stress-dependent exponential cutoff diverging at the critical rupture threshold.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.095505

PACS numbers: 62.20.Mk, 46.50.+a, 81.40.Np

Understanding fracture in solid materials is paramount for a safe engineering design of structures, and many efforts are still needed to obtain a better physical picture. A puzzling observation is the slow rupture of a material when loaded with a *constant external stress* below a critical threshold. Then, the delay time before rupture (or lifetime of the material) strongly depends on the applied stress. Thermodynamics has slowly emerged as a possible framework to describe slow rupture since early experiments have shown temperature dependence of lifetime with an Arrhenius law [1,2]. Statistical physics models assuming perfect elasticity have recently proposed several predictions for lifetime [3–8] as well as for the average dynamics of a slowly growing crack [9]. Efforts are also made to describe slow rupture dynamics from rheological properties of the material such as viscoelasticity and plasticity [10,11].

To be able to distinguish between various theoretical descriptions, more experimental work is needed. We present in this Letter an experiment on slow crack growth in a fibrous material. We have observed that the crack grows by steps of various sizes whose distribution is rather complex and evolves as a function of the crack speed. This behavior can be explained modeling the material as an elastic square lattice where the crack is pinned by elastic traps and adapting the model presented in [9] to describe thermally activated growth of the crack in an energy landscape with multiple metastable states. The model predicts statistical distribution of step sizes in very reasonable agreement with the experiments and has the typical functional form obtained for subcritical point statistics. We stress that the material heterogeneity appears in the model only as a characteristic mesoscopic length scale. The effect of disorder in the material properties and the rheological behavior have not been explicitly included in this simple model.

The experimental system we consider is a two-dimensional sheet with a macroscopic initial crack submitted to a constant load. This geometry is very useful to follow the crack advance using direct observation, while this would be difficult in a three-dimensional geometry

because a roughening instability of the crack front line usually occurs. We have used a sheet of fax paper (width  $w = 21$  cm, length 24 cm, thickness  $e = 50$   $\mu\text{m}$ ) for which a natural mesoscopic length scale is the fiber size. Scanning electron microscopy has revealed a size distribution of fibers between 4 and 50  $\mu\text{m}$ , with an average 20  $\mu\text{m}$ . In order to obtain reproducible results, the fax paper was kept in a controlled low level humidity at least one day at  $\approx 10\%$ , and also during the experiment at 5%. In these conditions, the paper Young modulus is  $Y = 3.5$  GPa. The paper sheet is mounted on a tensile machine with both ends attached with glue tape and rolled several times over rigid tubes. The crack is initiated at the center of the sheet using a calibrated blade. The force  $F$  applied to the sample by the tensile machine is measured by a force gage and is perpendicular to the crack direction, which corresponds to a crack opening in a mode I configuration. During an experiment, the crack grows and a feedback mechanism keeps  $F$  constant with a precision 0.1 to 0.5 N and a typical time response 10 ms. As a consequence, the stress amplitude at the crack

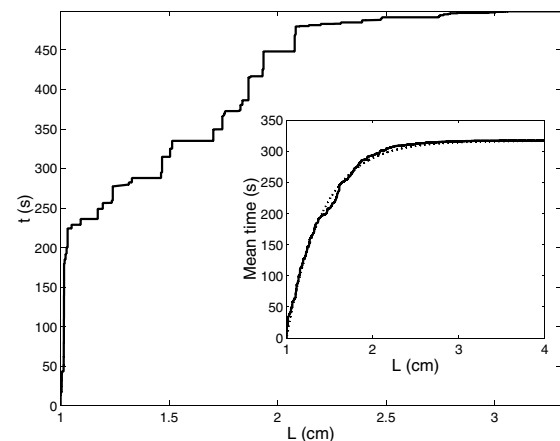


FIG. 1. Time versus crack length for a single experiment showing crack jumps and crack arrest. Inset: The average time to reach  $L$  (10 experiments with  $F = 270$  N and  $L_i = 1$  cm). The dotted curve is obtained from integration of Eq. (1) [9].



tip increases due to stress concentration effects and the motion of the crack accelerates. A high resolution and high speed digital camera (Photron Ultima 1024) is used to follow the crack growth. Image analysis is performed to extract the length of the crack projected on the main direction of propagation. Although the crack actually follows a sinuous trajectory, its projected length gives the main contribution to the stress intensity factor which measures the amplitude of stress divergence near the tip and verifies  $K \propto \sigma\sqrt{\ell}$ , with  $\sigma$  the external constant stress applied to the sheet and  $\ell$  the projected crack length. The stress  $\sigma$  is estimated from  $F$  and the area  $A$  of a cross section of the sheet,  $A$  being approximatively constant:  $\sigma = F/A$ . Because of the small thickness of the paper a slight buckling occurs, but it has been shown that the scaling with stress and crack length is not significantly modified [12]. On the other hand, finite width corrections on the stress intensity factor have been taken into account:  $K = g(\ell/w)\sigma\sqrt{\ell}$  with  $g(\ell/w) = [(w/\ell)\tan(\pi\ell/2w)]^{1/2}$  [13].

A typical growth curve is shown in Fig. 1. It clearly appears that the crack does not grow smoothly: essentially, there are periods of rest where the crack tip does not move and periods where it suddenly opens and advances of a certain step size  $s$ . We have extensively studied the growth varying the initial crack length ( $1 < \ell_i < 4$  cm) and the applied force ( $140 < F < 280$  N), equivalent to an initial stress intensity factor  $K_i$  between 2.7 and 4.2 MPa m<sup>1/2</sup>. The resulting measured lifetime varied from a few seconds to a few days depending on the value of the applied stress or the temperature. Even for the same experimental conditions (same stress, initial crack length, and temperature) a strong dispersion in lifetime was observed as expected in a model of thermally activated growth [9]. Furthermore, the average growth dynamics shows an exponential approach of lifetime in good agreement with the model (see inset) [9].

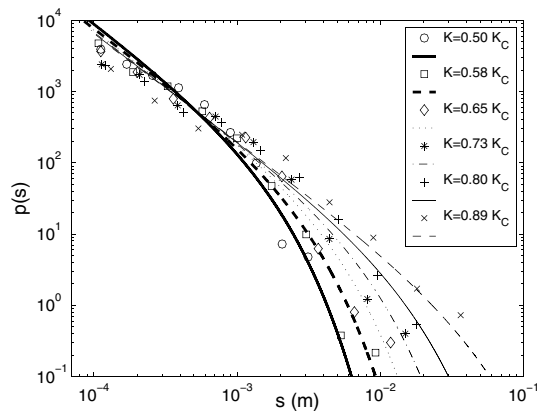


FIG. 2. Probability distribution of step sizes for various values of stress intensity factor. Choosing  $\lambda = 50 \mu\text{m}$ , the different curves are the best fits of Eq. (3) giving an average value  $V = 5 \pm 1 \text{ \AA}^3$ .

Results from the average dynamics are detailed elsewhere. Here, we want to study more extensively the step size statistics.

It is commonly observed that the crack velocity is an increasing function of the stress intensity factor  $K$ . Thus, it is natural to look at the step statistics for a given value of  $K$ . In practice, the step size distributions have been obtained for various ranges of  $K$ . Figure 2 shows the step size distributions determined from all the data we have collected using a logarithmic binning. Typically, 700 data points are used to obtain each distribution. Two regimes are observed. For small step sizes, the distribution does not depend on the value of  $K$ , while for larger step sizes there is a cutoff size increasing with  $K$ . In practice, the toughness of the material, i.e., its critical stress intensity factor  $K_c = 6.5 \pm 0.05 \text{ MPa m}^{1/2}$ , has been obtained as the value of  $K$  beyond which the probability to detect a jump vanishes.

The behavior observed for the step size distributions can be predicted using minimal physical properties. Let us assume that the material is mainly elastic but that there is a scale at which the material becomes discontinuous. In a perfect crystal, the only such scale would be the atomic scale, but in a fibrous material like paper, we have an intermediate mesoscopic scale, the typical fiber size. The elastic description of a material at a discrete level leads to a lattice trapping effect [14] with an energy barrier that has been estimated analytically [15]. To get a physical picture of the trapping in our geometry, we have modeled numerically a 2D square lattice of linear springs where the crack corresponds to a given number of adjacent broken springs as described in [9]. The lattice is loaded with a constant force, and we estimate the minimum increase in potential energy needed to bring the first spring at the crack tip at the breaking threshold. This energy is obtained by applying an external force on the spring at the crack tip and computing the change in

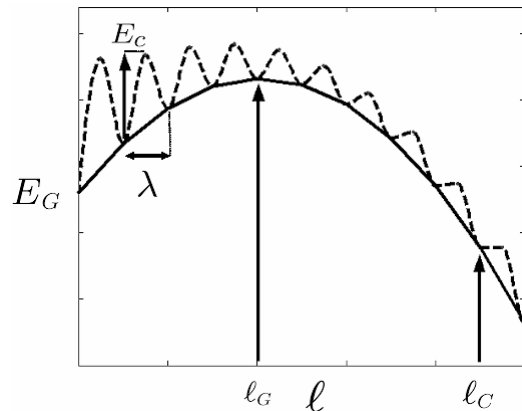


FIG. 3. Sketch of the Griffith potential energy  $E_G$  as a function of crack length  $\ell$  with constant applied stress (solid line). The energy barriers  $E_C$  and the discretization scale  $\lambda$  are represented by the dashed curve.

elastic energy of the whole lattice as well as the work done by the constant force at the boundaries. We find an energy barrier per unit volume:  $E_c \approx (\sigma_c - \sigma_m)^2/2Y$ , where  $Y$  is the Young modulus,  $\sigma_c$  the material stress threshold for rupture, and  $\sigma_m (< \sigma_c)$  the equilibrium local stress at the crack tip estimated at the discrete scale  $\lambda$ , i.e.,  $\sigma_m = K/\sqrt{\lambda}$ . To each position of the crack tip corresponds a different value of the energy barrier since the stress at the tip increases with the crack length. Once the spring breaks, the crack moves by at least one lattice spacing  $\lambda$ . The equilibrium potential energy of the whole system is given by the Griffith energy per unit thickness of the sheet [16]:  $E_G = E_0 - \pi\ell^2\sigma^2/4Y + 2\gamma\ell$ , where  $\gamma$  is the surface energy. In Fig. 3 we schematically represent the energy barrier of trapping and the Griffith energy. In agreement with a previous analysis [15], we find that the crack length  $\ell_c$  at which the energy barrier becomes zero is about twice the Griffith length  $\ell_G$  where the equilibrium potential energy reaches its maximal value.

In order to model crack rupture as a thermally activated process, we recall first ideas that were presented in [9]. Because of thermal noise at finite temperature  $T$  in a fixed volume  $V$ , there are statistical stress fluctuations  $\sigma_f$  around the equilibrium value  $\sigma_m$  with a Gaussian distribution:  $p(\sigma_f) \propto \exp[-(\sigma_f - \sigma_m)^2 V/2Yk_B T]$ . The material will break if the stress fluctuation  $\sigma_f$  becomes larger than the threshold  $\sigma_c$  with a probability:  $P(\sigma_f > \sigma_c) = \int_{\sigma_c}^{\infty} p(\sigma_f) d\sigma_f$ . Assuming the rupture process is irreversible, the velocity  $v$  of the crack tip is set proportional to the probability  $P(\sigma_f > \sigma_c)$  which gives

$$v = \frac{\lambda}{\tau_0} \int_{U_c}^{\infty} \frac{e^{-U_f} dU_f}{\sqrt{\pi U_f}}, \quad (1)$$

where  $U_f = (\sigma_f - \sigma_m)^2 V/2Yk_B T$ ,  $U_c = U_f(\sigma_f = \sigma_c)$ , and  $\tau_0$  is an elementary time scale (typically, an inverse vibrational frequency). Integration of Eq. (1) gives the average growth curve in inset of Fig. 1.

We extend now this model to describe thermally activated and irreversible motion of a crack in the rugged potential energy landscape introduced above. Below  $\ell_c$ , the energy barriers  $E_c(\sigma_m)$  trap the crack in a metastable state for an average time  $\tau_p$  depending on the barrier height. Irreversible crack growth is a very reasonable assumption when  $\ell > \ell_G$  since the decrease in equilibrium potential energy makes it more likely for the crack to open than to close. When a fluctuation  $\sigma_f$  occurs, it increases locally the free energy per unit volume by  $E_f(\sigma_m) \approx (\sigma_f - \sigma_m)^2/2Y$  (this comes from a Taylor expansion of the bulk elastic free energy in agreement with the numerical estimate of  $E_c$  and the Gaussian form of the stress fluctuations). The energy  $E_f$  can be used by the crack to overcome the barrier. If there are no dissipative mechanisms, the crack will grow indefinitely when  $\ell > \ell_G$  as the barriers get smaller and smaller and the release

of elastic energy helps to reach a more energetically favorable position. We introduce a simple mechanism of crack arrest assuming that after overcoming the energy barrier the crack loses an energy identical to the barrier size and does not gain any momentum from the elastic release of energy (experimentally, dissipation comes from acoustic wave emissions, viscous or plastic flow, etc.). When the crack reaches the next trap, it still has an energy  $E_f - E_c$  which might be sufficient to overcome the next barrier. For a given fluctuation energy  $E_f$ , the crack typically has enough energy to overcome a number of barriers  $n = E_f(\sigma_m)/E_c(\sigma_m)$  and makes a jump of size  $s = n\lambda$  [the decrease of  $E_c(\sigma_m)$  with  $\sigma_m$  during a jump of size  $s$  has been neglected]. The probability distribution for  $E_f$  is explored at each elementary step  $\tau_0$ , while the probability distribution of step size is explored after each average time  $\tau_p$  spent in the trap. In order to relate the two probabilities, we express the mean velocity in a different way as the ratio of the average step size to the average trapping time:

$$v = \frac{\int_{\lambda}^{\infty} s p(s) ds}{\tau_p}. \quad (2)$$

From the identity between Eqs. (1) and (2), and the normalization condition of the probability [ $\int_{\lambda}^{\infty} p(s) ds = 1$ ], we obtain the probability distribution:

$$p(s) = N(U_c) \frac{\sqrt{\lambda} e^{-s/\xi}}{2s^{3/2}}, \quad (3)$$

where  $N(U_c) = [e^{-U_c} - \sqrt{\pi U_c} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c})]^{-1}$  and  $\xi = \lambda/U_c$ . We find a power law with an exponent  $3/2$  and an exponential cutoff with a characteristic length  $\xi \sim (\sigma_c - \sigma_m)^{-2}$  diverging at the critical stress  $\sigma_c$ . Incidentally, we note that this probability has a form similar to subcritical point probability distributions in percolation theory [17]. From Eq. (3), we can compute from this distribution the first and second order moments:

$$\langle s \rangle = N(U_c) \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{2\sqrt{U_c}} \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}), \quad (4)$$

$$\langle s^2 \rangle = N(U_c) \frac{\lambda^2 \sqrt{\pi}}{4U_c^{3/2}} \left( \operatorname{erfc}(\sqrt{U_c}) + 2\sqrt{\frac{U_c}{\pi}} e^{-U_c} \right). \quad (5)$$

We obtain two asymptotical behaviors. When the relative energy barrier is high ( $U_c \gg 1$ ),  $\langle s \rangle \approx \lambda$  and  $\langle s^2 \rangle \approx \lambda^2$ . In this limit, there is only one step size possible. When the relative energy barrier becomes low ( $U_c \ll 1$ ), we predict a divergence at critical point:  $\langle s \rangle \sim (\sigma_c - \sigma_m)^{-1}$  and  $\langle s^2 \rangle \sim (\sigma_c - \sigma_m)^{-3}$ . Then, the crack velocity is expected to be dominated by the critical divergence of crack jumps.

To compare with our experimental data, we use an estimate of the stress near the crack tip by assuming as above that  $\sigma_m = K/\sqrt{\lambda}$ . In addition, the normalization

condition of the distribution actually reduces the model to one parameter, the ratio  $V/\lambda^2$ . In our model,  $\lambda$  represents the mesoscopic scale of discretization in paper. Setting  $\lambda = 50 \mu\text{m}$ ,  $V$  is the only unknown. One parameter fits of step size distributions in Fig. 2 for each range of stress intensity factors give very robust results:  $V = 5 \pm 1 \text{ \AA}^3$ . To check the asymptotic limit close to the critical point, we have plotted in Fig. 4  $\langle s \rangle$  and  $\langle s^2 \rangle^{1/3}$  as a function of  $K_c/(K_c - K_m)$ . Here, the first and second order moments have been computed from the raw measurements in a given range of  $K$ . Because it requires less statistics to estimate the first two moments of the distribution than the distribution itself, we are able to narrow the width of the  $K$  range for each data point without changing the global trend. The solid lines represent the model prediction using the fitted value of  $V$  from the distributions of Fig. 2. Not only does the model reproduce reasonably well the evolution of the step size distributions with  $\sigma_m$  ( $V$  is essentially constant and all the other parameters are fixed), but the asymptotic divergence of the first two moments of the distribution are also well reproduced. For the mean step size, the scaling is observed up to  $K$  values very close to  $K_c$  (1%). In the model, we see that the ratio of the second order moment over the first order moment is diverging at  $K_c$ . Thus, close to  $K_c$ , the second order moment becomes more inaccurate than the measure of the mean.

The value obtained for the volume  $V$  is at the atomic scale ( $V^{1/3} \simeq 1.7 \text{ \AA}$ ). Its small value gives an idea of the microscopic scale at which the thermodynamical stress fluctuations have the proper amplitude to trigger rupture in our model. It should be realized that the model actually predicts a lower limit for this microscopic scale. First, it assumes a strong dissipation of energy during crack advance since none of the elastic release of energy is used to keep the crack moving. This is certainly an overestimation of a real dissipative mechanism, would it be viscoelastic or plastic. Decreasing dissipation in the model permits larger steps of the crack. In order to obtain the same experimental velocity, the trapping time must also be larger which will happen if the rupture occurs at a larger microscopic scale. Second, disorder in the material properties has been completely neglected. It has been shown recently that disorder effectively reduces the energy cost for breaking, and this also permits rupture at a larger microscopic scale [8]. Further theoretical work needs to be done to introduce a more realistic dissipative mechanism and takes into account disorder in the material properties. As the model stands now, we believe that it should apply to any elastic materials for which a structure at a mesoscopic scale exists. For example, it would be interesting to understand if the model can explain crack jump dynamics observed in semicrystalline polymers [18]. To conclude, we have shown that a simple model of thermally activated crack dynamics is able to reproduce

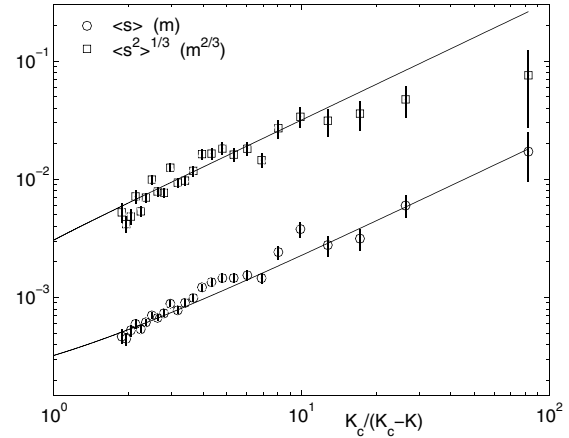


FIG. 4. The mean and cubic root of the second order moment of step sizes is well reproduced by the model [Eqs. (4) and (5)] plotted with  $\lambda = 50 \mu\text{m}$  and  $V = 5 \text{ \AA}^3$ .

with good accuracy the step size distribution of the crack growth. This is quite interesting because it may open new perspectives in the description of rupture as a thermally activated process.

We acknowledge illuminating discussions with E. Bouchaud, J.-P. Bouchaud, M. Ciccotti, and M. Marder.

- 
- [1] S. S. Brenner, J. Appl. Phys. **33**, 33 (1962).
  - [2] S. N. Zhurkov, Int. J. Fract. Mech. **1**, 311 (1965).
  - [3] L. Golubovic and S. Feng, Phys. Rev. A **43**, 5223 (1991).
  - [4] Y. Pomeau, C.R. Acad. Sci. Paris II **314**, 553 (1992).
  - [5] A. Buchel and J. P. Sethna, Phys. Rev. Lett. **77**, 1520 (1996); Phys. Rev. E **55**, 7669 (1997).
  - [6] K. Kitamura, I. L. Maksimov, and K. Nishioka, Philos. Mag. Lett. **75**, 343 (1997).
  - [7] S. Roux, Phys. Rev. E **62**, 6164 (2000).
  - [8] R. Scorretti, S. Ciliberto, and A. Guarino, Europhys. Lett. **55**, 626 (2001); Physica (Amsterdam) **158D**, 83 (2001).
  - [9] S. Santucci, L. Vanel, R. Scorretti, A. Guarino, and S. Ciliberto, Europhys. Lett. **62**, 320 (2003).
  - [10] J. S. Langer, Phys. Rev. Lett. **70**, 3592 (1993).
  - [11] A. Chudnovsky and Y. Shulkin, Int. J. Fract. **97**, 83 (1999).
  - [12] E. Riks, C. C. Rankin, and F. A. Brogan, Eng. Fract. Mech. **43**, 529 (1992).
  - [13] B. R. Lawn and T. R. Wilshaw, *Fracture of Brittle Solids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1975).
  - [14] R. Thomson, Solid State Phys. **39**, 1 (1986).
  - [15] M. Marder, Phys. Rev. E **54**, 3442 (1996).
  - [16] A. A. Griffith, Philos. Trans. R. Soc. London A **221**, 163 (1920).
  - [17] D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1991).
  - [18] M. Parsons, E. V. Stepanov, A. Hiltner, and E. Baer, J. Mater. Sci. **34**, 3315 (1999); **35**, 2659 (2000).



## Thermal activation of rupture and slow crack growth in a model of homogeneous brittle materials

S. SANTUCCI<sup>1</sup>, L. VANEL<sup>1</sup>, A. GUARINO<sup>2</sup>, R. SCORRETTI<sup>3</sup> and S. CILIBERTO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de physique, CNRS UMR 5672, Ecole Normale Supérieure de Lyon  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France*

<sup>2</sup> *Université de Polynésie Française - BP 6570 FAA'A, Tahiti, French Polynesia*

<sup>3</sup> *Ecole Centrale de Lyon - 69134 Ecully, France*

(received 14 November 2002; accepted in final form 28 February 2003)

PACS. 05.70.Ln – Nonequilibrium and irreversible thermodynamics.

PACS. 62.20.Mk – Fatigue, brittleness, fracture, and cracks.

**Abstract.** – Slow crack growth in a model of homogeneous brittle elastic material is described as a thermal activation process where stress fluctuations allow to overcome a breaking threshold through a series of irreversible steps. We study the case of a single crack in a flat sheet for which analytical predictions can be made, and compare them with results from the equivalent problem of a 2D spring network. Good statistical agreement is obtained for the crack growth profile and final rupture time. The specific scaling of the energy barrier with stress intensity factor appears as a consequence of irreversibility. In addition, the model brings out a characteristic growth length whose physical meaning could be tested experimentally.

*Introduction.* – Although tensile rupture of atomic bonds requires a stress comparable to Young's modulus, brittle solids commonly rupture at a much lower applied stress (typically 3 orders of magnitude lower). Griffith's pioneering work [1] has clarified the origin of this apparent weakening, postulating that small cracks usually pre-exist in real solids, with stress concentration at the crack tip strongly enhancing rupture. A somewhat similar and quite striking effect is the occurrence of failure even though the solid is stressed below its experimental breaking threshold (*i.e.*, even if stress concentration due to flaws is taken into account). The physical process, sometimes referred to as subcritical rupture, leads to a delay in the time for complete macroscopic failure of the solid, with a strong dependence on the amplitude of the applied stress.

A possible driving mechanism for subcritical damaging processes is thermal activation as supported by the early experimental work of Brenner and Zhurkov [2,3]. Zhurkov introduced a kinetic concept of strength of solids, where time to rupture follows an Arrhenius law with an energy barrier decreasing with increasing stress [3]. Interestingly, there is still debate about whether temperature fluctuations might be sufficient or not to nucleate microcracks and trigger crack growth. Recent theoretical works [4–7] have emphasized the effect of disorder in decreasing the effective energy barrier (conversely increasing the “effective temperature”). Other authors [8,9] have used equilibrium statistical thermodynamics to study how cracks

might naturally appear from thermal fluctuations in an otherwise homogeneous material which goes into a metastable state when stretched. However, another fundamental ingredient not usually taken into account is the irreversibility of the rupture mechanism, leading to dynamics out of equilibrium.

Temperature fluctuations in real materials are usually considered too weak to be able to overcome a potential energy barrier estimated as the free-energy cost to reach Griffith's critical crack length. But, the energy cost would be much smaller if rupture were considered as an irreversible process, where thermal fluctuations need only to be able to break atomic bonds one after another. Irreversibility has already been taken into account by Golubovic *et al.* [10], with the introduction of a minimum crack opening beyond which the crack cannot heal back. However, Golubovic introduces a complex behaviour of stepwise growth involving several bonds at a time, and eventually find that lifetime is dominated by a critical crack length in the same fashion as predicted directly from Griffith's criteria, albeit with a smaller critical length and a different power law dependence on applied stress. In this paper, we present a different approach by choosing *ab initio* a distribution of stress fluctuations directly linked to thermal fluctuations. Since our goal is to describe irreversible crack growth, we are considering the general case of a pre-existing initial crack in a flat sheet of material. In order to clarify our approach, we derive first the energy barrier corresponding to our geometry in the framework of Griffith's energy concept. Then, we give analytical solutions of our model which yield the complete growth dynamics for the case of a single crack. Finally, we compare the predictions of our model to the results obtained with a numerical simulation of a bidimensional elastic system in antiplane deformation.

*Energy barrier from Griffith's energy concept.* – Griffith's prediction of a critical crack size beyond which there is rupture, *i.e.* irreversible and fast crack growth, is derived from a potential energy taking into account elastic energy due to applied stress  $\sigma$  and surface energy  $\gamma$  needed to open a crack as a function of a unique order parameter, the crack length  $\ell$ . For a bidimensional geometry consisting of a flat sheet with a crack perpendicular to the direction of stress, the potential energy per unit thickness of the sheet reads

$$U = -\frac{\pi\ell^2\sigma^2}{4Y} + 2\gamma\ell + U_0, \quad (1)$$

where  $Y$  is the Young modulus and  $U_0$  is the elastic energy in the absence of crack. This energy reaches a maximum for a critical crack length  $\ell_c$  beyond which no stable state exists except the separation of the solid into two broken pieces. From this expression of the energy, it is clear that a stressed solid without crack is in a metastable state with a lifetime depending on the possibility to nucleate a crack with critical length.

Many authors [9–11] have used models essentially inspired by Griffith's energy concept to show that the lifetime should follow an Arrhenius law with an energy barrier scaling as  $\Delta U \sim \sigma^{-2}$  in a bidimensional geometry and  $\Delta U \sim \sigma^{-4}$  in a three-dimensional one. Following these authors, but taking into account the pre-existence of a stable initial crack of length  $\ell_i$  and introducing stress intensity factors  $K_i = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}\ell_i}$  and  $K_c = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}\ell_c}$ , the energy barrier becomes

$$\Delta U = U(\ell_c) - U(\ell_i) = \gamma\ell_i \left( \frac{K_i}{K_c} - \frac{K_c}{K_i} \right)^2 = \gamma\ell_i f(K_i, K_c). \quad (2)$$

Note that the energy barrier is a linear function of the initial crack length multiplied by a function depending only on stress intensity factors. This choice for the energy barrier implicitly assumes that there is a possibility for the crack to explore reversible states of crack length

between initial and critical crack length, and cannot be a good description if irreversibility of crack growth is to be taken into account.

*Energy barrier for an irreversible crack growth.* – Let us reflect on the fact that thermal fluctuations induce stress fluctuations in the material. The uniaxial loading state of a homogeneous solid at fixed temperature is described by its free energy density:  $\varphi(\sigma) = \sigma^2/2Y$ . Treating stress as a fluctuating internal variable in a fixed volume  $V$ , the probability to find a given stress is proportional to a Boltzmann factor  $\exp[-\varphi V/kT]$ . Expanding free energy about an equilibrium position  $\sigma$ , the distribution of stress  $\sigma_f$  is

$$p(\sigma_f) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Delta\sigma\rangle^2}} \exp\left[-\frac{(\sigma_f - \sigma)^2}{2\langle\Delta\sigma\rangle^2}\right], \quad (3)$$

where  $k$  is the Boltzmann constant,  $T$  is temperature and  $\langle\Delta\sigma\rangle^2 = kT/(V\partial^2\varphi/\partial\sigma^2) = kTY/V$  [12]. When a crack is present, the stress concentration increases the probability that breaking occurs at the crack tip rather than anywhere else. We assume that the stress distribution at the crack tip remains the same as eq. (3), despite the strong divergence of stress and the breakdown of linear elasticity. Since the stress intensity factor  $K \approx \sigma\sqrt{\ell}$  gives a measure of stress intensity close to the crack tip for a crack with length measurement  $\ell$  when the external load is  $\sigma$ , we choose to work directly with this quantity. The threshold for rupture at the crack tip will be given by a critical value of the stress intensity factor,  $K_c$ , as is usual laboratory practice. The cumulative probability that stress intensity is larger than a given value  $\eta$  is then  $P(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} p(x) dx$ . Since breaking is assumed to be an irreversible process, the typical velocity of crack should be directly proportional to the probability to have fluctuations giving stress intensity larger than  $\eta = K_c$ :

$$\frac{d\ell}{dt} = V_0 P(\eta = K_c) \simeq V_0 \sqrt{\frac{EkT}{2\pi}} \frac{1}{K_c - K} \exp\left[-\frac{(K_c - K)^2}{2EkT}\right], \quad (4)$$

where  $E$  is a dimensional constant proportional to the Young modulus. In eq. (4), the last equality is valid as long as  $kT \ll \eta^2/2E$ . We also introduced a typical velocity  $V_0$  which represents the crack velocity when the condition for crack advance is verified at all times ( $P = 1$ ). This quantity is typically the ratio of a microscopic scale (interatomic distance) and a characteristic time (inverse vibrational frequency). Since  $K$  is a function of crack length  $\ell$ , eq. (4) is a differential equation for crack evolution. To solve this equation requires additional approximations since the dependence of the stress intensity factor on crack length is non-linear. First, we introduce a reduced crack length  $\phi \equiv (\ell - \ell_i)/(\ell_c - \ell_i)$  to measure crack evolution as it grows from its initial value ( $\phi = 0$ ) to its ultimate stable value ( $\phi = 1$ ). Then, the stress intensity factor can be written:

$$K \approx \sigma\sqrt{\ell} = \sigma\sqrt{\ell_i + (\ell_c - \ell_i)\phi} \simeq K_i \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ell_c}{\ell_i} - 1\right)\phi\right], \quad (5)$$

where the last equality is a reasonable approximation giving less than a 2% error on the stress intensity factor as long as  $\phi < 1/2$  and  $\ell_c < 2\ell_i$ . Another approximation will be to take  $K = K_i$  in the pre-factor of the exponential, because neglecting the variation in stress intensity factor leads only to a logarithmic correction of the crack velocity. As a consequence of the last approximation, the crack velocity will tend to be underestimated. The solution of the differential equation (4) is then

$$t = \tau \left[1 - \exp\left[-\frac{\phi}{\phi_c}\right]\right], \quad (6)$$

where  $\tau$  gives the lifetime of the sample before fast rupture:

$$\tau = \tau_0 \exp \left[ \frac{(K_c - K_i)^2}{2EkT} \right] \quad (7)$$

with

$$\tau_0 = \frac{2\sqrt{2\pi EkT}}{K_i} \frac{\ell_i}{V_0} \quad (8)$$

and  $\phi_c$  is related to a characteristic growth length  $\lambda$ :

$$\phi_c = \frac{\lambda}{\ell_c - \ell_i} = \frac{2EkT}{K_i(K_c - K_i)} \frac{\ell_i}{\ell_c - \ell_i}. \quad (9)$$

Note that the crack velocity  $\frac{d\ell}{dt} = \lambda/(\tau - t)$  diverges as time comes closer to lifetime  $\tau$ , which simply means that, when time  $\tau$  is reached, slow crack growth due to thermal activation is no longer the driving mechanism, and a crossover towards fast dynamic crack propagation will occur. The lifetime  $\tau$  appearing in eq. (7) follows an Arrhenius law with an energy barrier function of initial and critical stress intensity factors similar to eq. (2), but instead, there is no additional proportionality to initial crack length. A similar scaling for the energy barrier was found by Marder [13].

*Results from the simulation of a 2D elastic spring network.* – In order to check predictions from the previous analysis, we model a bidimensional elastic system as a network of springs forming a square lattice whose nodes can move only along an axis perpendicular to the undeformed plane of springs. The elastic restoring force of the spring is proportional to the variation in displacement along the moving axis. This is a simplified model of an antiplane deformation. A constant force is applied at two opposite sides of the lattice, the direction of the force being parallel to the moving axis, but reversed from one side to the other. Starting from an equilibrium configuration, an external force obtained from a normal distribution is applied in parallel to each spring. A new static equilibrium configuration is determined to find the fluctuations of spring forces. In this procedure, fluctuations are quasi-statically coupled to a temperature bath. Making the elastic constant between force and displacement equal to unity, the temperature coefficient  $kT$  is numerically identical to the variance of spring force fluctuations. Whenever the force on a spring exceeds a breaking threshold  $f_c$ , the spring is cut and, since it is never repaired, the process is irreversible. The crack itself is modelled as a series of broken parallel springs, with the crack direction parallel to the sides where the constant force is applied. The size of the square lattice ( $100 \times 100$  springs) is determined to reduce finite-size effects and obtain the correct scaling of stress intensity factor with applied stress and crack length. The time scale in the simulation is given as the constant time between two configurations of force fluctuations in the system, and the length scale as the distance between two nodes of the lattice.

The distribution of lifetimes  $\tau$  obtained in the simulations is a decreasing exponential with a typical width  $\sqrt{\langle \Delta\tau^2 \rangle}/\tau \approx 0.5$ . In figs. 1 and 2, we plot the lifetimes averaged over an ensemble of 10 to 50 simulations for samples with different initial crack lengths and different temperatures. In fig. 1, the logarithm of the lifetime is plotted as a function of the energy barrier given by eq. (2) and scaled by the temperature coefficient  $kT$ . For a given initial crack length, a good scaling is obtained at various temperatures. However, when the initial crack length is changed, the scaling with the energy barrier does not work at all. In fig. 2, the logarithm of the lifetime scaled by  $\tau_0$  is plotted as a function of the energy barrier given by eq. (7). This energy barrier scaling appears to be correct whatever the initial crack length or



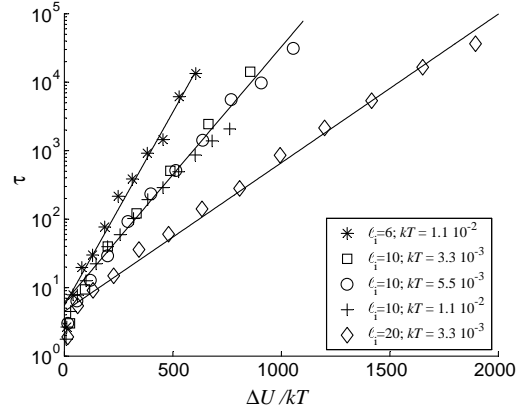


Fig. 1 – Logarithm of lifetime as a function of the energy barrier as predicted by eq. (2). Failure of data to scale with initial crack length is the main observation. Straight lines are a guide for the eye.

temperature. It seems that the lack of dependence on initial crack length in the energy barrier given by eq. (7) is a signature of irreversibility. Indeed, if one considers the potential energy landscape obtained from eq. (1), we can describe a growth process where small irreversible steps  $\delta$  occur, with the energy barrier to overcome each of these steps proportional to the derivative of the potential energy. It can be seen from eq. (1) that this energy barrier would be expressed only as a function of stress intensity factor as in eq. (7). For each step, the energy barrier can be written  $\Delta U = \frac{dU}{d\ell} \delta = (K_c^2 - K_i^2) \delta / Y$ , and the waiting time for the crack to advance with step  $\delta$  is given by an Arrhenius law. Integrating the time it takes to go from  $\ell_i$  to  $\ell_c$  gives in the limit  $\delta \ll \ell_i$  the following scaling relation:

$$\tau \approx \exp \left[ \frac{K_c^2 - K_i^2}{Y k T} \delta \right]. \quad (10)$$

Although this approach does correct the problem of scaling with  $\ell_i$ , it completely fails to give

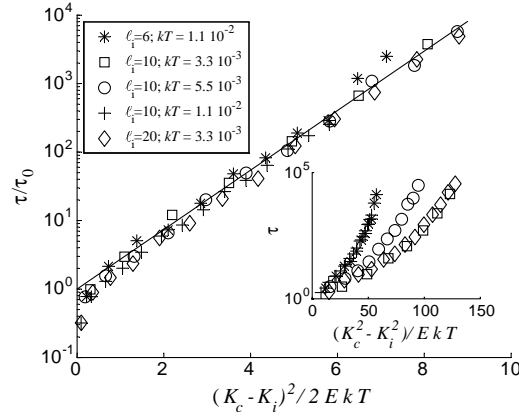


Fig. 2 – Logarithm of lifetime as a function of the energy barrier as predicted by eq. (7). Scaling works for various temperatures and initial crack lengths. The straight line, slope 1, is the prediction from eq. (7). The inset shows failure of scaling with energy barrier as predicted by eq. (10).

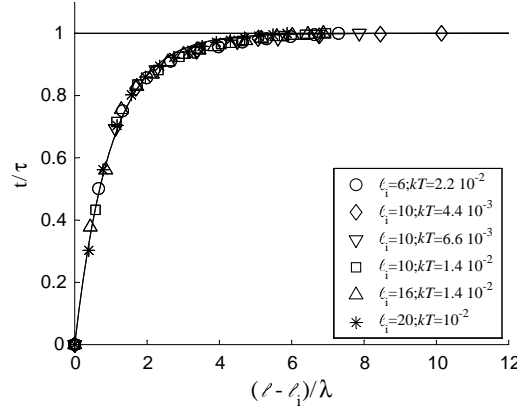


Fig. 3 – Rescaled time as a function of rescaled crack length for various initial crack lengths and temperatures. For each set of data,  $\lambda$  is extracted as the only fit parameter since lifetime is known. The solid line corresponds to eq. (6).

the correct scaling of the energy barrier with stress intensity factors; furthermore, for a given initial crack length, temperature scaling is lost as can be seen from the insert in fig. 2.

To determine the characteristic growth length  $\lambda$  which appears in our model, it is necessary to look at the complete growth dynamic. As for lifetimes, there is a strong dispersion in growth curves obtained for different simulations with the same temperature and initial crack length. In order to get statistical information about crack growth, we determine the average time it takes for the crack to reach a certain length. In fig. 3, which shows flowing time as a function of crack length, the exponential behaviour obtained in eq. (6) is recovered and yields a value of  $\lambda$ . In fig. 4, we plot  $\lambda$  scaled by the coefficient  $\alpha = 2E\ell_i/[K_i(K_c - K_i)]$  as a function of  $kT$ . The linear dependence of  $\lambda$  on temperature predicted by eq. (9) appears clearly for various initial crack lengths and applied forces. In addition, the correct rescaling of data with initial crack lengths is mainly related to the linear dependence of  $\lambda$  on  $\ell_i$ . Dispersion of data for a given temperature and initial crack length occurs systematically above prediction of the model

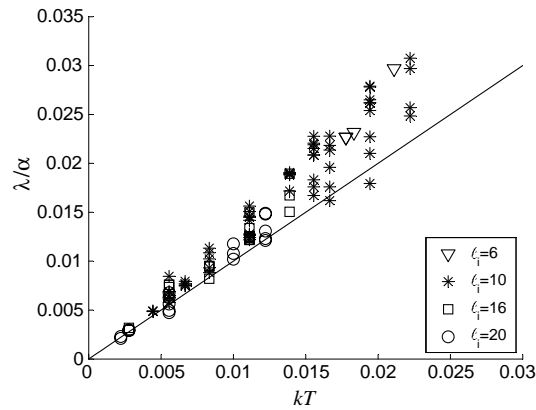


Fig. 4 – Linear dependence of  $\lambda/\alpha$  on the temperature coefficient  $kT$  for various initial crack lengths and applied forces. The solid line shows the behaviour expected from the model (slope = 1).

(see solid curve in fig. 4). This can be understood as a consequence of the approximations in our model underestimating crack velocity. This interpretation is consistent with the increase in dispersion of the data as  $\ell_c$  increases.

*Conclusion.* – We have shown that by taking into account distribution of stress fluctuations, we can describe thermally activated and irreversible crack growth and obtain the correct scaling of lifetime with applied stress and initial crack length. Previous predictions based on Griffith's potential energy [9–11] fail to take into account irreversibility of the rupture process, thus do not apply to our configuration. Our challenge is to find a way to include irreversibility in a problem of total potential energy minimization, since simple arguments fail to give the correct behaviour. More work should be done to check that stress divergence at the crack tip does not preclude the derivation of stress distribution presented in this paper. Direct comparisons with experiments can be performed to test the relevance of the characteristic length scale for crack growth introduced in our model, as well as scaling of both lifetimes and characteristic growth length on initial crack length.

#### REFERENCES

- [1] GRIFFITH A. A., *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **221** (1920) 163.
- [2] BRENNER S. S., *J. Appl. Phys.*, **33** (1962) 33.
- [3] ZHURKOV S. N., *Int. J. Fract. Mech.*, **1** (1965) 311.
- [4] ROUX S., *Phys. Rev. E*, **62** (2000) 6164.
- [5] ARNDT P. F. and NATTERMANN T., *Phys. Rev. B*, **63** (2001) 134204-1.
- [6] SCORRETTI R., CILIBERTO S. and GUARINO A., *Europhys. Lett.*, **55** (2001) 626.
- [7] CILIBERTO S., GUARINO A. and SCORRETTI R., *Physica D*, **158** (2001) 83.
- [8] BLUMBERG SELINGER R. L., WANG Z.-G. and GELBART W., *Phys. Rev. A*, **43** (1991) 4396.
- [9] BUCHEL A. and SETHNA J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 1520; *Phys. Rev. E*, **55** (1997) 7669.
- [10] GOLUBOVIC L. and FENG S., *Phys. Rev. A*, **430** (1991) 5233.
- [11] POMEAU Y., *C.R. Acad. Sci. Paris II*, **314** (1992) 553; *C.R. Mécan.*, **330** (2002) 1.
- [12] DIU B., GUTHMANN C., LEDERER D. and ROULET B., *Physique Statistique* (Hermann, Paris) 1989, p. 272.
- [13] MARDER M., *Phys. Rev. E*, **54** (1996) 3442.



# Bibliographie

- [1] Douglas Wright, Notes on "DESIGN AND ANALYSIS OF MACHINE ELEMENTS", "Department of Mechanical and Materials Engineering The University of Western Australia", <http://www.mech.uwa.edu.au/DANotes/fracture/maritime/maritime.html>
- [2] Site hébergé par l'ENS-Lyon : <http://www.ens-lyon.fr/Planet-Terre/>.
- [3] Page personnelle de Kwan-tai Leung, Institute of Physics, Academia Sinica, Taïwan, <http://www.sinica.edu.tw/leungkt/quasifracture.html>
- [4] Site hébergé par l'ENS-Lyon : <http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/Hydro/GDR-2284/>.
- [5] Douglas Wright, Notes on "DESIGN AND ANALYSIS OF MACHINE ELEMENTS", "Department of Mechanical and Materials Engineering The University of Western Australia", <http://www.mech.uwa.edu.au/DANotes/fracture/maritime/maritime.html>
- [6] "The Complex Systems and Soft Materials Program", A Science Program in Norway, [http://www.phys.ntnu.no/complex/fracture\\_e.php3](http://www.phys.ntnu.no/complex/fracture_e.php3)

## Ouvrages de référence

- [7] H. J. Herrmann, S. Roux *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*, (North Holland, Amsterdam, 1990).
- [8] B. Diu *et al*, *Physique Statistique*, Herrmann, Paris, 1989.
- [9] D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1991).
- [10] L. P. Kadanoff, *Statistical Physics* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [11] Lawn B. R. and Wilshaw T. R., 1975. *Fracture of Brittle Solids*. Cambridge University Press. Cambridge.
- [12] M.F. Kaninen, C.H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, (1985).

- [13] M. Kachanov, "Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems", *Advances in Applied Mechanics*, vol. **33**, p.260, (Academic Press, 1997).
- [14] Liebowitz H., 1968. *FRACTURE An Advanced Treatise* VOLUME II, p.2-67, Academic Press.
- [15] J. Lemaître, J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod (1996).
- [16] Atkinson B. K., 1987. *Fracture mechanics of rock*. Academic Press.
- [17] G.R. Irwin, *Fracture, Handbuch der physik*, Springer-Verlag, Berlin, Vol.6 pp557 (1958).
- [18] F. Mulargia and R.J Geller *Earthquake Science and Seismic Risk Reduction* NATO Science Series IV/32.
- [19] J.G. Williams, *Fracture Mechanics of Polymers*, Ellis Horwood Lim (1984).

## Thèses

- [20] J-F. Boudet, *Thèse de doctorat*, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1998.
- [21] A. Guarino, *Thèse de doctorat*, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1999.
- [22] A. Boudaoud, *Thèse de doctorat*, Université Paris VI, 2001.
- [23] H. Bercegol, *Thèse de doctorat*, Université Paris VI, 1991.
- [24] L. Salminen, *PhD Thesis*, Helsinki University of Technology, 2003.
- [25] H. Nechad *Thèse de doctorat*, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [26] S. Deschanel, *Thèse de doctorat en cours*, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [27] P.P. Cortet, *Stage de DEA*, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2004.
- [28] J.P. Michel, *Stage de magistère*, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2003.

## Articles

- [29] P. Paris, M.P. Gomez, W.P. Anderson, *The Trend in Engineering* **13**, pp.9-14, (1961).

- [30] P. Paris, F. Erdogan, Journal of Basic Engineering **89**, pp.528-534, (1963).
- [31] P.Daguier, B.Nghiem, E.Bouchaud and F.Creuzet, Phys. Rev. Lett. **78**,6,(1997).
- [32] S.R. Choi, J.P. Gyekenyesi, Journal of Materials Science **34**, pp.3875-3882, (1999).
- [33] J. S. Langer, Phys. Rev. Lett. **70**, 3592 (1993).
- [34] A. Chudnovsky, and Y. Shulkin, Int. J. of Fract. **97**, 83 (1999).
- [35] M. Marder and J. Fineberg, Physics Today, 24-29 (1996).
- [36] C.E. Inglis, Trans. Inst. Naval. Archit. 55, 219(1913).
- [37] A.A. Griffith, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **221**, 163, (1920).
- [38] S. S. Brenner, J. Appl. Phys., **33**, 33, (1962).
- [39] S. N. Zhurkov, Int. J. Fract. Mech., **1**, 311, (1965).
- [40] S. Roux, Phys. Rev. E, **62**, 6164, (2000).
- [41] P.F. Arndt et T. Nattermann, Phys. Rev. B, **63**, 134204-1, (2001).
- [42] R.L. Blumberg Selinger, Z.-G. Wang et W. Gelbart, Phys. Rev. A, **43**, 4396, (1991).
- [43] A. Buchel A. et J. P. Sethna, Phys. Rev. Lett., **77**, 1520, (1996).
- [44] L. Golubovic et S. Feng, Phys. Rev. A, **430**, 5233, (1991).
- [45] Y. Pomeau, C.R. Acad. Sci. Paris II **314**, 553,(1992); C.R. Mécanique, **330**, 1, (2002).
- [46] R.Beker, W. Döring, Ann. Phys. Lpz, 24, pp.719, (1935).
- [47] K. Kitamura I. L. Maksimov, and K. Nishioka, Phil. Mag.Lett. **75**, 343 (1997).
- [48] I. L. Maksimov, K. Kitamura, K. Nishioka , Phil. Mag.Lett. **81**, 547 - 554 (2001).
- [49] A. Delaplace, J. Schmittbuhl, and K.J. Måløy, Phys. Rev. E, **60**,pp. 1337-1343,(1999).
- [50] L. Pauchard, J. Meunier, PRL vol. 70, 23, (1993).
- [51] D. Bonn, H. Kellay, M. Prochnow, K. Ben-Djemaa, J. Meunier, Sciences vol. 280, pp 265-267 (1998)
- [52] S. M. Wiederhorn, J. Am. Ceram. Soc. **50**, 407 (1967).
- [53] A. Gilabert, P. Sibillot, D. Sornette, C. Vanneste, D. Maugis, F. Muttin, Eur. J. Mech. A, **11**, 65 (1992)

- [54] A. Garcimartin, A. Guarino, L. Bellon and S. Ciliberto, Phys. Rev. Lett. **79**, 3202 (1997).
- [55] A. Guarino, A. Garcimartin and S. Ciliberto, European Physical Journal B, vol(6), pp. 13-24, (1998).
- [56] A. Guarino, S. Ciliberto and A. Garcimartin, Europhys. Lett. **47**(4), pp.456-461 (1999).
- [57] R. Scorretti, S. Ciliberto and A. Guarino, Europhys. Lett. **55**(5), 626 (2001).
- [58] S. Ciliberto, A. Guarino, and R. Scorretti, Physica D **158**, 83 (2001).
- [59] S. Santucci, P.-P. Cortet, L. Vanel, and S. Ciliberto, soumis pour les proceedings de 11th International Conference on fracture (2005).
- [60] L. I. Salminen, A. I. Tolvanen, and M. J. Alava, Phys. Rev. Lett. **89**, 185503-1 (2002).
- [61] M. Marder, Phys. Rev. E **54**, 3442 (1996).
- [62] E. Riks, C.C. Rankin, and F. A. Brogan, Engng. Fract. Mech. **43**(4), 529 (1992).
- [63] I. G. Main, G. O'Brien and J. R. Henderson, J. Geophys. Res. - Solid Earth **105** (B3), 6105 (2000).
- [64] J. Lu, K. Ravi-Chandar, Int. J. Solids Structures, **36**, 391 (1999).
- [65] M. Parsons, E. V. Stepanov, A. Hiltner and E. Baer, J. Mater. Sci. **34**, 3315 (1999); J. Mater. Sci. **35**, 2659 (2000).
- [66] A. Johansen and D. Sornette, Eur. Phys. J. B **18**, 163 (2000).
- [67] R. C. Hidalgo, F. Kun and H. J. Herrmann, Phys. Rev. E **64**, 066122 (2001).
- [68] A. Petri, G. Paparo, A. Vespignani, A. Alippi and M. Costantini, Phys. Rev. Lett. **73**, 3423 (1994).
- [69] C. Maes, A. Van Moffaert, H. Frederix and H. Strauven, Phys. Rev. B **57**, 4987 (1998).
- [70] M. Kloster, A. Hansen, and P. C. Hemmer, Phys. Rev. E **56**, 2615 (1997).
- [71] L. Oddershede, P. Dimon, J. Bohr, Phys. Rev. Lett. **71**, 19 (1993).
- [72] Irwin G. R., Kies J. A., 1954. Subcritical Crack Growth in Vitreous Carbon at Room Temperature. *Welding Res. Suppl.*, **33**, pp. 193s-198s.
- [73] R. Thomson, C. Hsieh and V. Rana, J. appl. Phys. **42**(1971), pp 3154-3160



- 
- [74] R. Thomson, Physics of fracture, Solid State Physics 39, pp 1-129, (1986).
  - [75] F. Célarié, S. Prades, D. Bonamy, L. Ferrero, E. Bouchaud, C. Guillot, and C. Marlière, P.R.L., 90, (4) (2003).
  - [76] E. Bouchaud, F. Paun, Comput. Sci. Eng., September/October, 32, (1999).
  - [77] J. Schmittbuhl, A. Hansen, and G.G. Batrouni, Phys. Rev. Lett., 90, (2003).

---

# Croissance lente thermiquement activée et piégeage d'une fissure dans les matériaux structurés à une échelle mésoscopique : expériences et modèles.

## Résumé :

Ce mémoire est consacré à l'étude expérimentale et théorique de la dynamique de croissance lente d'une fissure sous contrainte, en géométrie bidimensionnelle.

Des expériences de chargement à force constante, dites de fluage, sur des matériaux hétérogènes fibreux (feuilles de papier) comportant un défaut macroscopique initial (mode 1 de rupture) nous ont permis d'observer la croissance lente par sauts d'une fissure. La dynamique moyenne de croissance du défaut depuis une longueur initiale  $L_i$  jusqu'à une longueur critique  $L_C$ , où l'avancement devient rapide, suit une loi exponentielle déterminée par 2 paramètres, le temps de vie de l'échantillon  $\tau$  et une longueur caractéristique de croissance  $\zeta$ . La mesure de l'énergie de surface nécessaire pour ouvrir la fente permet de distinguer la longueur critique de Griffith  $L_G$  et la longueur critique de rupture  $L_C$  expérimentale. Une analyse statistique montre que la distribution des sauts de longueur de fissure suit une loi de puissance tronquée par une coupure exponentielle. Cette distribution, caractéristique de l'approche d'un point critique, dépend du facteur d'intensité des contraintes  $K$ .

Nous modélisons la croissance lente d'une fissure dans une plaque parfaitement élastique, selon un processus de rupture irréversible activée par les fluctuations statistiques de contraintes à l'équilibre thermodynamique. Cette approche théorique validée par des simulations numériques sur un réseau élastique discret est en bon accord avec les expériences. De plus, la prise en compte de pièges élastiques dus à la nature discrète du modèle permet de décrire une dynamique de croissance par sauts et de prédire la forme de la distribution des sauts observée expérimentalement.

**Mots clefs : fissure, fracture fragile, thermodynamique irréversible et hors d'équilibre, croissance sous-critique, piégeage.**

---

## Slow crack growth and crack pinning in heterogeneous media : experiments and models

### Abstract :

This thesis presents an experimental and theoretical study of slow growth mechanisms of a single crack under stress in a bidimensional geometry.

We have performed traction experiments (creep tests) of heterogeneous fibrous materials (paper samples) with an initial macroscopic defect (mode 1). We have observed that the slow crack growth is actually progressing by steps. The average dynamics of the crack growth from an initial length  $L_i$  to a critical length  $L_C$ , where the fracture is rapid, shows an exponential law for the crack growth defined by 2 parameters : the rupture time  $\tau$  and a characteristic growth length  $\zeta$ . A measure of the surface energy needed to open the crack permits to distinguish the Griffith length  $L_G$  and the critical length of rupture  $L_C$ . A statistical study of the step size during the damaging process reveals that the step size distribution follows a power law truncated by an exponential, which is typical of a critical point approach in a sub-critical process.

This complex dynamics can be predicted quantitatively by our semi-analytical approach, which describes the slow crack growth in a pure bi-dimensional elastic system in terms of an activation process, where the statistical stress fluctuations allow to overcome a breaking threshold through a series of irreversible steps. Our theoretical approach based on a numerical model (a 2d spring network describing a bi-dimensional elastic "discrete" system) shows the importance of the irreversibility of the rupture process and the crucial role of heterogeneities, which appear only in our model as a characteristic mesoscopic length scale, in dynamics of slow fracture.

**Key-words : fracture, cracks, brittleness, non-equilibrium and irreversible thermodynamics, sub-critical growth, pinning.**

---

